Analisi Matematica II
Lezione 03
30 settembre 2015

PER SCARICARE LE SLIDES
VEDERE IL SITO

elearning.ing.unipi.it

CORSO DI ANALISI 2 2015-16

VOGLIO DIM. LA FORMULA

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \otimes \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

LA DIMOSTRO PER PASSI SUCCESSIVI.

1° CASO $\quad \vec{c} = \vec{a}$ $\quad$ $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ORTOGONALI e non nulli

chiamo $\vec{u} = \underbrace{(\vec{a} \otimes \vec{b})}_{\vec{v}} \otimes \vec{a}$ $\quad$ ALLORA

$\vec{u} \perp \vec{a}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$

INOLTRE

$$\boxed{\vec{v} \perp \vec{a}\ , \ \vec{v} \perp \vec{b}\ , \ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) \text{ è destrorsa}}$$

$\Rightarrow \vec{u}$ è nella direzione di $\vec{b}$

$\vec{u} = \lambda \vec{b}$ per $\lambda \in \mathbb{R}$, inoltre $(\vec{v}, \vec{a}, \vec{u})$ è destrorsa

cioè $(\vec{v}, \vec{a}, \lambda\vec{b})$ destrorsa $\Leftrightarrow (\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{v}) \Rightarrow \boxed{\lambda > 0}$

DUNQUE $\vec{u} = \lambda \vec{b}$ con $\lambda > 0$. Dato che sono tutti vettori ortogonali

$\lambda \vec{b} = \vec{v} \otimes \vec{a}$ FACCIO I MODULI ; (CONTA $\lambda > 0$)

$\lambda \|\vec{b}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{a}\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|a\| = \|b\| \cdot \|a\|^2$

$\Rightarrow \lambda = \|a\|^2$ e quindi

$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \otimes \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{b}$ $\leftarrow$ LA FORMULA CERCATA

nel caso $\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{c} = \vec{a}$

II° caso $\vec{c} = \vec{a}$ MA NON CHIEDO $\vec{a} \perp \vec{b}$

CHIAMO $\vec{b}_1 = \vec{b} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$ CHIARAMENTE $\vec{b}_1 \perp \vec{a}$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{a} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\|a\|^2}\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

USO IL PRIMO CASO:

$$(\vec{a}\otimes\vec{b}_1)\otimes\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}_1 = (\vec{a}\cdot\vec{a})\left(\vec{b} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\right) =$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b} - (a\cdot b)\vec{a}$$

$$\|$$

$$\left(\vec{a}\otimes\left(\vec{b} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}}{\|a\|^2}\right)\right)\otimes\vec{a} = (\vec{a}\otimes\vec{b})\otimes\vec{a}$$

HA PRODOTTO VETTORE

CON $\vec{a}$ NULLO

HO DIMOSTRATO LA FORMULA SE $\vec{c} = \vec{a}$

TERZO CASO $\vec{c} = \vec{b}$: Scambio $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$(\vec{a}\otimes\vec{b})\otimes\vec{b} = -(\vec{b}\otimes\vec{a})\otimes\vec{b} = -(\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$$

QUARTO PASSO $\quad \vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ USO LA LINEARITÀ (su ogni fattore) di "$\otimes$" $\Rightarrow$ Tesi

DUNQUE LA FORMULA VALE SE $\vec{c}$ è nel piano $(\vec{a}, \vec{b})$

CASO GENERALE se $a \otimes b \neq 0$ (cioè $\vec{a}$ e $\vec{b}$ lin. indip.)

Prendo $\vec{c}$ qualunque e chiamo

$$\vec{c}_1 = \vec{c} - \underbrace{\frac{(\vec{a} \otimes \vec{b} \cdot \vec{c})}{\|\vec{a} \otimes \vec{b}\|^2}}_{=\gamma} (\vec{a} \otimes \vec{b})$$

(proiezione di $\vec{c}$ sul piano per $\vec{a}$ e $\vec{b}$)

USANDO IL CASO PRECEDENTE

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \otimes c_1 = (\vec{a} \cdot c_1)\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot c_1)\,\vec{a} =$$

$$\overset{\shortparallel}{(\vec{a} \cdot \vec{c})}\,\vec{b} - \overset{\shortparallel}{(\vec{b} \cdot \vec{c})} \cdot \vec{a}$$

(VERIFICARE USANDO LA DEFINIZIONE DI c_1)

$$\|$$

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \otimes (\vec{c} + \gamma\, \vec{a} \otimes \vec{b}) = (\vec{a} \otimes \vec{b}) \otimes \vec{c}$$

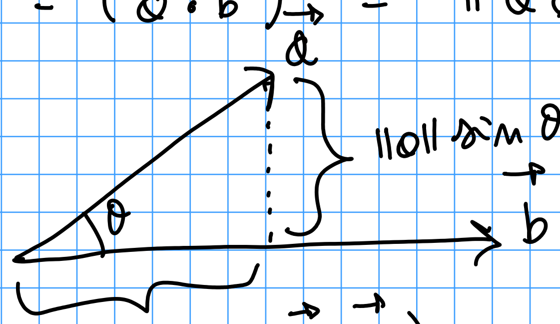
RIMANE IL CASO $\vec{a} \otimes \vec{b} = 0$ (SI FA IL CONTO - VEDI LUCIDI)

DUNQUE $(\vec{a} \otimes \vec{b}) \otimes \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a}$

CONSEGUENZA: dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si ha

$$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|a \otimes b\|^2$$

GEOMETRICAMENTE



$\|a\| \sin\theta = \ell$

$$= \text{lunghezza} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\|\vec{b}\|} = \|\vec{a}\| \cos(\theta)$$

$$\|\vec{a} \otimes \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2(\theta) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) =$$

$$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\|a\| \cdot \|b\| \cos\theta)^2 =$$

$$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

RICAVIAMOLO "ANALITICAMENTE" USANDO LE PROP. DI "$\otimes$"

$$\|\vec{a} \otimes \vec{b}\|^2 = \underbrace{(\vec{a} \otimes \vec{b})}_{\vec{c}} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = \text{(prop. 6 dell'elenco)}$$

$$\vec b \cdot (\vec c \otimes \vec a) = \vec b \cdot [(\vec a \otimes \vec b) \otimes \vec a] = \text{(proprietà vista prima)}$$

$$\vec b \cdot [(\vec a \cdot \vec a)\vec b - (\vec a \cdot \vec b)\vec a] =$$

$$(\vec a \cdot \vec a)(\vec b \cdot \vec b) - (\vec a \cdot \vec b)(\vec a \cdot \vec b) = \|\vec a\|^2 \|\vec b\|^2 - (\vec a \cdot \vec b)^2$$

!!

DISTANZA TRA DUE RETTE NELLO SPAZIO

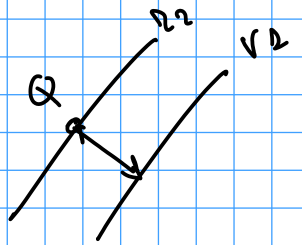
r_1 data da $P + t\vec v =: P_t \quad t \in \mathbb{R}$

r_2 data da $Q + s\vec w = Q_s \quad s \in \mathbb{R}$

$P, Q \in \mathbb{R}^3 \quad \vec v, \vec w$ vettori non nulli

(1) SE $\vec v \parallel \vec w$ $(\vec v \otimes \vec w = 0) \Rightarrow$ rette parallele

Allora $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(Q, r_1)$ (visto ieri)

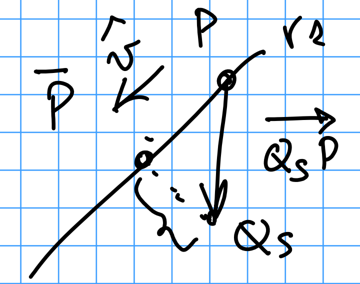


(Si vede abbastanza facilmente)

(2) $\vec{v} \otimes \vec{w} \neq 0$

Fisso s e considero la distanza tra Q_s e r_1

$\mathrm{dist}(Q_s, r_1)^2 =$ (visto ieri)



$$= \|\overrightarrow{Q_sP}\|^2 - (\overrightarrow{Q_sP}\cdot\hat{v})^2 = \circledast$$

$$\left(\text{dove } \hat v = \frac{\vec v}{\|\vec v\|},\quad \hat w = \frac{\vec w}{\|\vec w\|}\right),$$

$$\bar P = P + \overrightarrow{Q_sP}\cdot\hat v$$

$$\circledast = \|\overrightarrow{Q_sP}\otimes \hat v\|^2 =$$

$$\|(P-Q_s)\otimes\hat v\|^2 = \|(P-(Q+s\hat w))\otimes \hat v\|^2 =$$

suppongo di essere partito con $\hat w$

$$\|((P-Q)-s\hat w)\otimes\hat v\|^2 = \|(\overrightarrow{QP} - s\hat w)\otimes \hat v\|^2 =$$

$$\|(\overrightarrow{QP}\otimes\hat v) - s(\hat w\otimes\hat v)\|^2 \quad \left(= \|\overrightarrow{QP}\otimes\hat v + s(\hat v\otimes\hat w)\|^2\right)$$

$$\|\overrightarrow{QP}\otimes\hat{v}\|^2 - 2s\left(\overrightarrow{QP}\otimes\hat{v}\cdot(\hat{w}\otimes\hat{v})\right) + s^2\|\hat{w}\otimes\hat{v}\|^2 \quad (\star)$$

DERIVO IN s: $\quad -2\left(\overrightarrow{QP}\otimes\hat{v}\right)\cdot\left(\hat{w}\otimes\hat{v}\right) + 2s\|\hat{w}\otimes\hat{v}\|^2$

EGUAGLIANDO A ZERO LA DERIVATA:

$$s = \bar{s} := \frac{\left(\overrightarrow{QP}\otimes\hat{v}\right)\cdot\left(\hat{w}\otimes\hat{v}\right)}{\|\hat{w}\otimes\hat{v}\|^2}$$

($\bar{s}$ realizza il minimo. devo mettere $\bar{s}$ in $(\star)$)

$$(\text{distanza minima})^2 = \|\overrightarrow{QP}\otimes\hat{v}\|^2 - 2\frac{\left(\left(\overrightarrow{QP}\otimes\hat{v}\right)\cdot\left(\hat{w}\otimes\hat{v}\right)\right)^2}{\|\hat{w}\otimes\hat{v}\|^2} + \frac{\left(\left(\overrightarrow{QP}\otimes\hat{v}\right)\cdot\left(\hat{w}\otimes\hat{v}\right)\right)^2}{\|\hat{w}\otimes\hat{v}\|^2} =$$

$$= \frac{\overbrace{\|\overrightarrow{QP}\otimes\hat{v}\|^2}^{\vec{a}}\ \overbrace{\|\hat{w}\otimes\hat{v}\|^2}^{\vec{b}} - \overbrace{\left(\left(\overrightarrow{QP}\otimes\hat{v}\right)\left(\hat{w}\otimes\hat{v}\right)\right)^2}^{\vec{a}\cdot\vec{b}}}{\|\hat{w}\otimes\hat{v}\|^2} =$$

(formula vista prima)

$$\frac{\left\| \left(\overset{c}{\overrightarrow{QP}} \otimes \hat v\right) \otimes \left(\overset{a}{\hat w} \otimes \overset{b}{\hat v}\right) \right\|^2}{\| \hat w \otimes \hat v \|^2} = \text{(di nuovo la formula)}$$

$\overrightarrow{QP} \otimes \hat v \perp \hat v$

$$\frac{\left\| \hat w \cdot \left(\overrightarrow{QP} \otimes \hat v\right) \hat v - \overbrace{\hat v \cdot \left(\overrightarrow{QP} \otimes \hat v\right)}^{=0} \hat w \right\|^2}{\| \hat w \otimes \hat v \|^2} =$$

$$\frac{\left\| \hat w \cdot \left(\overrightarrow{QP} \otimes \hat v\right) \hat v \right\|^2}{\| \hat w \otimes \hat v \|^2} = \frac{\left| \hat w \cdot \overrightarrow{QP} \otimes \hat v \right|^2 \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\| \hat v \|^2}}}{\| \hat w \otimes \hat v \|^2} =$$

$$\frac{\left| \overrightarrow{QP} \cdot \hat v \otimes \hat w \right|^2}{\| \hat w \otimes \hat v \|^2} = \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \cdot \left(\hat v \otimes \hat w\right) \right|^2}{\| \hat v \otimes \hat w \|^2}$$

IN DEFINITIVA

$$\boxed{\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\hat v \otimes \hat w}{\| \hat v \otimes \hat w \|} \right| = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec v \otimes \vec w}{\| \vec v \otimes \vec w \|} \right|}$$

(mettere $\hat v = \vec v / \|\vec v\|$ e $\hat w = \vec w / \|\vec w\|$)

ESEMPIO (Esercizi)

Considero r_1 e r_2 definite da:

$r_1 : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x=y \end{cases}$

VOGLIO TROVARE $dist(r_1, r_2)$

$r_2 : \begin{cases} x+y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

PER APPLICARE LA FORMULA DEVO TROVARE UNA FORMA PARAMETRICA DI r_1 / r_2

IN r_1 prendo $x = t \Rightarrow y = t$ e $t + t + z = 1$

da cui

$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases}$

PER CUI $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ $\quad \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$

ANCHE IN r_2 prendo $t = x \Rightarrow y = 1 - t$, $z = 2$ TROVO

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{2} \qquad \hat{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$$

MI SERVE $\hat{v} \otimes \hat{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & 1 & 1 \\ \vec{j} & 1 & -1 \\ \vec{k} & -2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2}} =$

IN REALTÀ QUESTO FATTORE È DESTINATO A SPARIRE - POTEVO

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \left(\vec{i}(-2) - \vec{j}(2) + \vec{k}(-1-1) \right) =$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \left(-2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{v} \otimes \hat{w}}{\|\hat{v} \otimes \hat{w}\|} = -\frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \qquad \text{(HA GIÀ NORMA 1 ..)}$$

DUNQUE $d(r_1, r_2) = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\hat{v} \otimes \hat{w}}{\|\hat{v} \otimes \hat{w}\|} \right| =$

$$\left(\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{j} + \vec{k} \right)$$

$$= \left| (\vec{j} + \vec{k}) \cdot \frac{(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}{\sqrt{3}} \right| = \frac{1 + 1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$