Analisi Matematica II
Lezione 01
28 settembre 2015

Schwartz: Dati $\vec{v}$, $\vec{w}$ (non nulli) $\Rightarrow$

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$$

Dim. Considero la funzione

$$\phi(t) = \|\vec{v} + t\vec{w}\|^2 \geq 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

Per le proprietà (1) – (5)

$$\phi(t) = (\vec{v} + t\vec{w})(\vec{v} + t\vec{w}) =$$

$$\|\vec{v}\|^2 + 2t(\vec{v} \cdot \vec{w}) + t^2\|\vec{w}\|^2$$

polinomio in t di grado 2 $\Rightarrow$ discriminante ≤ 0

$$\frac{\Delta}{4} = (\vec{v}\cdot\vec{w})^2 - \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 \leq 0 \quad \text{dunque}$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{w})^2 \leq \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2$$

Faccio la radice $\Rightarrow$ $\boxed{|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}$ $(*)$

INOLTRE VALE "=" se e solo se i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono sulla stessa retta, cioè se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{w} = c\vec{v}$ (o $\vec{v} = c\vec{w}$ dato che sono $\neq 0$)

SUPPONIAMO CHE VALGA "=" IN $(*)$. Prendo

$$c = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|}$$

$$\|\vec{w} - c\vec{v}\|^2 = \|\vec{w}\|^2 - 2c\,\vec{v}\cdot\vec{w} + \|\vec{v}\|^2 c^2$$

$$\|\vec{w}\|^2 - 2\frac{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|^2}\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| + \|\vec{v}\|^2\frac{\|\vec{w}\|^2\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^4}$$

$$\|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{w}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = 0$$

DUNQUE $\vec{w} - c\vec{v} = 0 \iff \vec{w} = c\vec{v}$

DA SCHWARTZ $\Rightarrow$ DIS. TRIANG. PER LA NORMA

INFATTI presi $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ho:

$$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{v}\cdot\vec{w} + \|w\|^2 \leq$$

$$\|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\| + \|w\|^2 = (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2$$

ESSENDO LE NORME POSITIVE FACCIO LA RADICE $\Rightarrow$

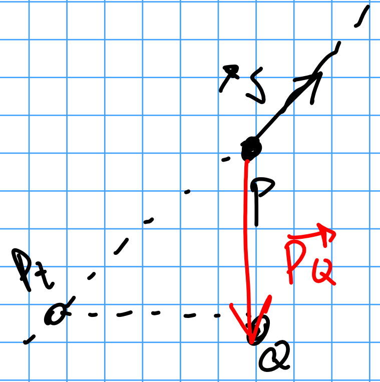
$$\|\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL PR. SCALARE

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA (IN $\mathbb{R}^N$)

NOTA per individuare una retta r basta dare un punto P che sta su r e un vettore $\vec{v}$ tale che

$$R \in r \iff R = (P_t :=) P + t\vec{v} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

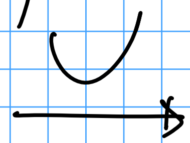


Dato allora un altro punto Q voglio calcolare la distanza di Q da r e cioè

$$\min_{t\in\mathbb{R}} \| P_t - Q \|$$

Conviene fare il $\min_{t\in\mathbb{R}} \| P_t - Q \|^2 = \min_{t\in\mathbb{R}} \| P + t\vec{v} - Q \|^2 =$

$$\min_{t\in\mathbb{R}} \| \vec{QP} + t\vec{v} \|^2 = \min_{t\in\mathbb{R}} \Big(\underbrace{\|\vec{QP}\|^2 + 2t\,\vec{QP}\cdot\vec{v} + t^2\|\vec{v}\|^2}_{\text{PARABOLA CHE HA MINIMO}} \Big)$$



(nota: se uso Schwarz vedo $\circledast$ che il Δ è ≤ 0)

Eguaglio a zero la derivata rispetto a t:

$$2\,\vec{QP}\cdot\vec{v} + 2t\|\vec{v}\|^2 = 0 \qquad \boxed{t = \frac{\vec{PQ}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} =: \bar{t}}$$

($P - Q$ è il vettore da Q a P)

$\bar{t}$ è il valore di t per cui si ha il minimo.

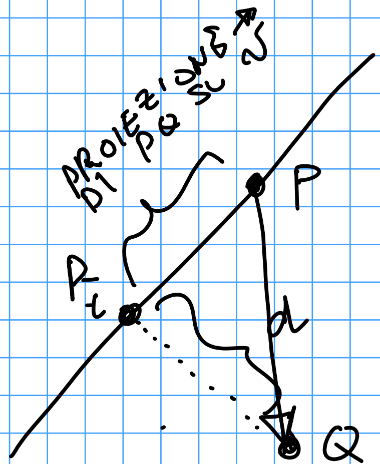
Il valore minimo della distanza si ottiene mettendo $t = \bar{t}$ in (*)

$$\|\vec{PQ}\|^2 - 2\,\frac{\vec{PQ}\cdot v}{\|v\|^2}\,\vec{PQ}\cdot v + \frac{(\vec{PQ}\cdot\vec{v})^2}{\|v\|^2} =$$

$$\|\vec{PQ}\|^2 - \frac{(\vec{PQ}\cdot\vec{v})^2}{\|\vec{v}\|^2} = \boxed{\|\vec{PQ}\|^2 - (\vec{PQ}\cdot\hat{v})^2 = d^2}$$

distanza di r da Q

dove $\hat{v} := \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$



POSITIVA PER SCHWARTZ:

$$|\vec{PQ}\cdot\hat{v}| \leq \|\vec{PQ}\|$$
$$|\vec{PQ}\cdot\hat{v}|^2 \leq \|\vec{PQ}\|^2$$