3.8 Funzioni di Bessel

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione lineare

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{3.24}$$

dove n è un intero assegnato. Notiamo che l'equazione non è in forma normale (e se la mettiamo in forma normale diventa singolare in zero). In particolare non vale il teorema (3.7.1). Proviamo comunque a cercare la soluzione come somma di una serie di potenze centrate nell'origine (anche se l'origine è un punto "cattivo" per l'equazione). Poniamo cioè $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Derivando:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2},$$

da cui:

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} - n^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \\ &\sum_{k=2}^{\infty} a_k(k^2 - k)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k - n^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \\ &\sum_{k=2}^{\infty} \left[a_k(k^2 - n^2) + a_{k-2}\right] x^k - n^2 a_0 + (1 - n^2)a_1 x \end{aligned}$$

da cui

$$n^2 a_0 = 0, \qquad (1 - n^2)a_1 = 0, \qquad a_k(k^2 - n^2) + a_{k-2} = 0 \quad \forall k \geq 2.$$

Consideriamo il caso $n \geq 2$ (per semplicità - però tutto quanto segue si estende facilmente anche ai casi $n = 0$, $n = 1$). Allora le due prime eguaglianze danno $a_0 = a_1 = 0$. La terza fornisce la relazione ricorsiva, valida da 2 in poi:

$$a_k(k^2 - n^2) = -a_{k-2} \tag{3.25}$$

che, come abbiamo già notato nel caso dei polinomi di Legendre, permette di ricavare indipendentemente i termini con k pari e i termini con k dispari. In effetti se si pone $u_k = a_{2k}$ e $k_k := a_{2k+1}$ la (3.25) equivale alle due relazioni ricorsive

$$u_{k+1}((2k + 2)^2 - n^2) = -u_k \tag{3.26}$$

$$v_{k+1}((2k + 3)^2 - n^2) = -v_k \tag{3.27}$$

Supponiamo per esempio che n sia pari, diciamo $n = 2m$, allora si vede che tutti i v_k sono nulli. Infatti la (3.27) si può scrivere

$$v_{k+1} = -\frac{v_k}{(2k + 3)^2 - 4m^2} \qquad v_0 = a_1 = 0$$

in cui il denominatore non si annulla per nessun k. Per i termini pari si può fare una considerazione analoga ricavando che tutti gli $u_k = 0$ con k per $k < m - 1$. Infatti la proprietà ricorsiva:

$$u_{k+1} = -\frac{u_k}{(2k + 2)^2 - 4m^2} \qquad u_0 = a_0 = 0 \tag{3.28}$$

funziona fino a $k = m - 2$. Al passo $k = m - 1$ la formula originaria (3.26) dice solo che $u_m \cdot 0 = u_{m-1} (= 0)$, che è vera qualunqe sia u_m. Dunque il termine $u_m = a_{2n} = a_n$ può essere scelto ad arbitrio. Da $k = m$ in poi la (3.28) torna ad essere efficace, dato che il denominatore non si annulla più, e quindi i termini u_k per $k \geq m$ sono univocamente determinati da u_m, mediante la relazione ricorsiva.

In modo analogo si vede che, se $n = 2m + 1$ è dispari, allora $u_k = 0$ per ogni k mentre $v_k = 0$ per $k \leq m - 1$, mentre "rimane libero" il termine $v_m = a_{2m+1} = a_n$. Da $k = m$ in poi i v_k sono univocamente determinati da v_m.

Volendo esprimere tutto in termini di n vediamo allora che:

- $a_k = 0$, se $k < n$ o se $k >$ e k ha parità diversa da n;
- $\alpha := a_n$ si può fissare ad arbitrio;
- gli a_k con $k > n$ e con la stessa parità di n sono univocamente determinati da α mediante la (3.25) (e dipendono linermente da α).

Non è difficile verificare che:

$$a_{n+2h} = \alpha \frac{(-1)^h}{4^h [1 \cdot 2 \cdots h][(n+1)(n+2) \cdots (n+h)]} = \alpha \frac{(-1)^h n!}{4^h h!(n+h)!}$$

(una volta intuita la formula la si dimostra per induzione!). Dunque:

$$y(x) = \alpha n! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{4^h h!(n+h)!} x^{n+2h} = \alpha n! x^n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!(n+h)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2h}$$

Applicando il criterio del rapporto è immediato verificare che tale serie converge per ogni x reale e quindi risolve l'equazione (3.24). Convenzionalmente si chiama *funzione di Bessel di prima specie* di ordine n la funzione sopra con $\alpha = 2^{-n}/n!$ cioè:

$$J_n(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!(n+h)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2h}$$

Queste funzioni si annullano tutte in $x = 0$ tranne quella di ordine $n = 0$, anzi dalla definizione si vede che $J_n(x) \sim \frac{x^n}{2^n n!}$ per $x \to 0$. Inoltre J_n è una funzione pari se n è pari ed è dispari se n è dispari. Con un'analisi più approfondita (che non possiamo fare qui) si potrebbe dimostrare che per $x \to +\infty$

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right).$$

Dunque ognuna di queste funzioni ammette una successione di zeri $(z_k^{(n)})$ (numerati con $k = 0, 1, \ldots$) che per k grande tendono a disporsi come $z_k^{(n)} \sim \dfrac{2n+1}{4}\pi + 2k\pi$. Riportiamo nella figura 3.12 i grafici delle prime J_n.

Notiamo che, nonostante l'equazione sia del secondo ordine, abbiamo trovato solo una famiglia a un parametro di soluzioni. Ciò è dovuto al fatto che abbiamo voluto cercare una serie di potenze centrata in zero, punto in cui l'equazione è singolare. In questo modo abbiamo selezionato le soluzioni che si prolungano con continuità in zero. In realtà possiamo trovare delle informazioni anche sulle soluzioni che sono singolari in zero. Per questo supponiamo che y_1 e y_2 risolvano l'equazione (3.24) per $x > 0$. Allora:

$$\begin{cases} x^2 y_1'' + x y_1' + (x^2 - n^2) y_1 = 0 \\ x^2 y_2'' + x y_2' + (x^2 - n^2) y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 y_1'' y_2 + x y_1' y_2 + (x^2 - n^2) y_1 y_2 = 0 \\ x^2 y_2'' y_1 + x y_2' y_1 + (x^2 - n^2) y_2 y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(y_1'' y_2 - y_1 y_2'') + (y_1' y_2 - y_1 y_2') = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(x(y_1' y_2 - y_1 y_2')\right) = 0 \Leftrightarrow x(y_1' y_2 - y_1 y_2') = K$$

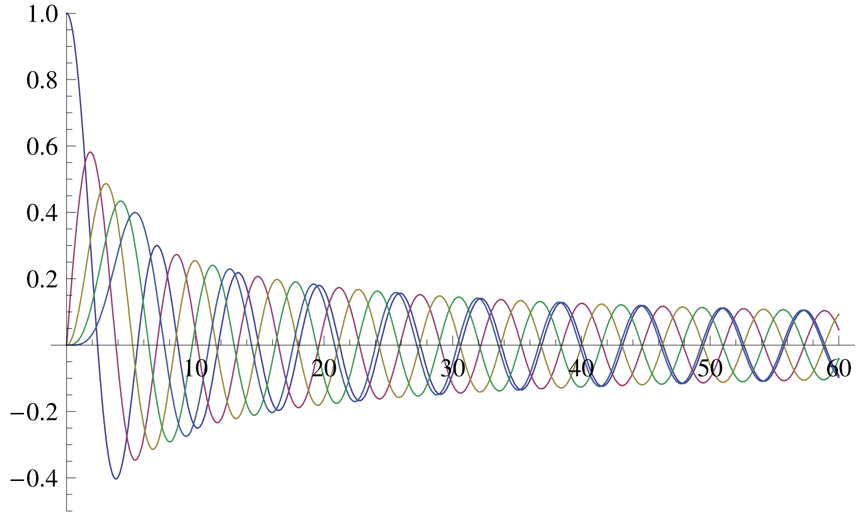

Figura 3.12: Funzioni di Bessel J_0, J_1, J_2, J_3, J_4

dove K è una costante. Dividendo per xy_1^2:

$$\frac{K}{xy_1^2} = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_1^2} = \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\left(\int_1^x \frac{K}{\xi y_1^2(\xi)}\,d\xi + K_1\right)$$

dove K_1 è un'altra costante. Non è difficile far vedere che vale il viceversa, cioè se y_1 è soluzione di (3.24), allora y_2 definita sopra è soluzione su $\{x > 0\}$ per ogni coppia di costanti K e K_1. Se definiamo la funzione

$$Y_n(x) := -\frac{1}{\pi}J_n(x)\int_1^x \frac{d\xi}{\xi J_n^2(\xi)}$$

vediamo facilmente che per $x \to 0$ $Y_n(x) \sim -\frac{2^n(n-1)!}{\pi}x^{-n}$ per $n > 0$ mentre $Y_0(x) \sim \ln(x)$. Allora J_n e Y_n sono linearmente indipendenti, per cui $\alpha J_n + \beta Y_n$ genera tutte le soluzioni di (3.24) su $\{x > 0\}$. In particolare αJ_n descrive esattamente le soluzioni che sono prolungabili in $x = 0$.
La funzione Y_n introdotta sopra si dice *funzione di Bessel di seconda specie* di ordine n.

Fissiamo ora un numero $R > 0$. Per n ed m interi poniamo $y_{n,m}(\rho) := J_n\left(\frac{\rho}{R}z_m^{(n)}\right)$. Allora la funzione $y_{n,m}$ risolve:

$$\begin{cases} \rho^2 y''_{n,m}(\rho) + \rho y'(\rho)_{n,m} + (\mu_{n,m}\rho^2 - n^2)y_{n,m}(\rho) = 0 & \text{in }]0, R[\\ y_{n,m}(0) = 0(\text{se } n > 0), y_{n,m}(R) = 0 \end{cases}$$

dove $\mu_{n,m} = \left(\frac{z_m^{(n)}}{R}\right)^2$, che si può anche scrivere

$$\begin{cases} (\rho y'_{n,m}(\rho))' + \left(\mu_{n,m}\rho - \frac{n^2}{\rho}\right))y_{n,m}(\rho) = 0 & \text{in }]0, R[\\ y_{n,m}(0) = 0(\text{se } n > 0), y_{n,m}(R) = 0 \end{cases}. \tag{3.29}$$

3.8.1 Proposizione. *Se $j \neq k$ si ha:*

$$\int_0^R \rho y_{n,j}(\rho)y_{n,k}(\rho)\,d\rho = 0.$$

Dimostrazione. Moltiplichiamo l'equazione (3.29), con $m = j$, per $y_{n,k}(\rho)$ e integriamo tra zero e R. Si ottiene (integrando per parti):

$$0 = \int_0^R \left(\rho y'_{n,j}(\rho)\right)' y_{n,k}(\rho)\, d\rho + \int_0^R \left(\mu_{n,j}\rho - \frac{n^2}{\rho}\right) y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho)\, d\rho =$$

$$\underbrace{\left[\left(\rho y'_{n,j}(\rho)\right) y_{n,k}(\rho)\right]_{\rho=0}^{\rho=R}}_{=0} - \int_0^R \rho y'_{n,j}(\rho) y'_{n,k}(\rho)\, d\rho + \int_0^R \left(\mu_{n,j}\rho - \frac{n^2}{\rho}\right) y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho)\, d\rho,$$

(il primo termine sparisce perché $y_{n,k}$ si annulla in 0 e in R); quindi

$$\int_0^R \rho y'_{n,j}(\rho) y'_{n,k}(\rho)\, d\rho = \int_0^R \left(\mu_{n,j}\rho - \frac{n^2}{\rho}\right) y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho)\, d\rho.$$

Scambiando j e k si ottiene:

$$\int_0^R \rho y'_{n,j}(\rho) y'_{n,k}(\rho)\, d\rho = \int_0^R \left(\mu_{n,k}\rho - \frac{n^2}{\rho}\right) y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho)\, d\rho.$$

e prendendo la differenza:

$$(\mu_{n,j} - \mu_{n,k}) \int_0^R \rho y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho)\, d\rho = 0.$$

Dato che $\mu_{n,j} \neq \mu_{n,k}$ ne segue la tesi. □