Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 61, 19 maggio 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

PROSSIME VOLTE (TUTTE RISERVATE A ESERCIZI)

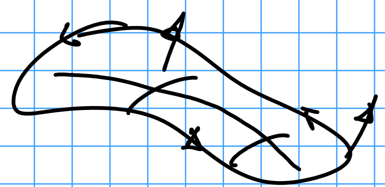
MARTEDÌ 20 solito orario 11.30 – 13.30 F4

MARTEDÌ	27/5	13.30 – 15.30	Aula	B22
GIOVEDÌ	29/5	13.30 – 15.30	Aula	F5
MARTEDÌ	3/6	9.30 – 11.30	Aula	F5

MERCOLEDÌ 4/6 II° COMPITINO ore 9.00 aula F9

TEOREMA DI STOKES:

Data una superficie orientabile S, $\vec{\nu}$ la normale unitaria, che abbia un bordo descritto da una curva γ percorsa coerentemente con $\vec{\nu}$;



dato un campo di vettori $\vec{F}$ (di classe C^1 definito in un intorno di S) SI HA LA FORMULA

$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{\nu})\,ds \;\left(= \Phi(\mathrm{rot}\,\vec{F}, S)\right)$$

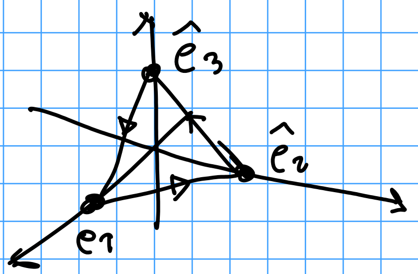
$$\| $$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

QUALCHE ESEMPIO

(1) $T =$ "TRIANGOLO" DI VERTICI $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

(IN $\mathbb{R}^3$)



VOGLIO CALCOLARE

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

dove $\vec{F} = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbb{K}$

e γ percorre il bordo di T "girando nel senso $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$"

Modo 1 (probabilmente più complicato) in maniera diretta.

VEDO il bordo di T come tre pezzi (i tre lati del triangolo descritta da $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tutte definite su $[0,1]$

$\gamma_1(t) = ((1-t), t, 0)$ $\qquad \gamma_1' = (-1, 1, 0) \leftarrow$

$\gamma_2(t) = (0, 1-t, t)$ $\qquad \gamma_2' = (0, -1, 1)$

$\gamma_3(t) = (t, 0, 1-t)$ $\qquad \gamma_3' = (1, 0, -1)$

- $$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)\,t \\ t \cdot 0 \\ 0 \cdot (1-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$\left(\vec{F} = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} \right) \qquad - \int_0^1 t(1-t)\, dt = \left[-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

- $$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \cdot (1-t) \\ (1-t)\,t \\ t \cdot 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -\int_0^1 t\,(1-t)\, dt = -\frac{1}{6}$$

- $$\int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t\,(1-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\int_0^1 t\,(1-t)\, dt = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Modo II (usando Stokes)

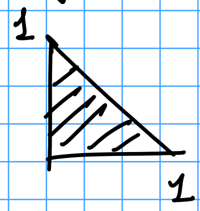
Devo descrivere T come una superficie: posso usare

$$T = \left\{ \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3 : \alpha_i \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \hat{e}_3 : \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1 \right\}$$

Allora posso parametrizzare T usando

$$T(u,v) = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-u-v) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dove $(u,v) \in D =$  $= \{(u,v) : u \geq 0, v \geq 0 \quad u+v \leq 1\}$

$$T(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1-u-v \end{pmatrix} \qquad T_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad T_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LA DIREZIONE NORMALE INDOTTA DA QUESTA PARAMETRIZZAZIONE È

$$T_u \otimes T_v$$

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to 1 \cdot i + 1 \cdot j + 1 \cdot k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SI VEDE (A OCCHIO) che QUESTA DIREZIONE NORMALE

È COERENTE CON IL VERSO DI γ (dato all'inizio)

DUNQUE - APPLICANDO STOKES -

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_T \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d = \Phi(\operatorname{rot}\vec{F}, T) = \otimes$$

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ D_x & D_y & D_z \\ xy & yz & zx \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -y \\ -z & +0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

$$\otimes = \iint_D -\begin{pmatrix} v \\ 1-u-v \\ u \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} du\,dv = -\iint_D (v + 1-u-v+u)\,du\,dv$$

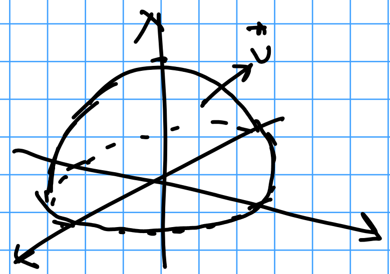
$$\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1-u-v \end{pmatrix} \qquad D = \{ u+v \leq 1,\ u\geq 0, \geq 0\}$$

$$= -\iint_D 1\, du\,dv = -\frac{1}{2} \quad (D = \text{TRIANGOLO DI BASE} = \text{ALTEZZA} = 1)$$

(2) $$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, ds = \Phi(\vec{f}, S) \quad \text{dove}$$

$$S = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z\geq 0\} \qquad \vec{\nu}(x,y,z) = \frac{1}{\|\ \|}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2y+2x \\ -2x \\ -2z-3 \end{pmatrix}$$



(1) Usiamo la definizione.

DESCRIVIAMO S MEDIANTE:

$$\Gamma(\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\Gamma_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_\psi = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi \\ \sin\theta \cos\psi \\ -\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\theta \otimes \Gamma_\psi = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\sin\psi & \cos\theta\sin\psi & 0 \\ \cos\theta\cos\psi & \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi \end{bmatrix}$$

$$= i\left(-\cos\theta\sin^2\psi\right) - j\left(\sin^2\psi\sin\theta\right) + k\left(-\sin\psi\cos\psi\right)$$

- LA DESCRIZIONE "DEGENERA" se $\psi = 0$ (però non conta ai fini dell'integrale)
- Se metto $\psi = \frac{\pi}{2}$ trovo $\Gamma_\theta \otimes \Gamma_\psi = -i\cos\theta - j\sin\theta \quad K \cdot 0$

LA NORMALE PUNTA VERSO DENTRO DEVO CAMBIARE IL SEGNO SE VOGLIO L'INTEGRALE RICHIESTA (oppure prendere $T(\psi,\theta)$)

$$\Phi(\vec f, S) = -\iint_D \vec f\,(T(\theta,\psi))\cdot T_\theta(\theta,\psi)\otimes T_\psi(\theta,\psi)\, d\theta\, d\theta =$$

$(D = \{0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\psi\le\pi\})$

$$\cancel{-}\iint_D \begin{pmatrix} -2\sin\theta\sin\psi + 2\cos\theta\sin\psi \\ -2\cos\theta\sin\psi \\ -2\cos\psi - 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cancel{-}\cos\theta\sin^2\psi \\ \cancel{-}\sin\theta\sin^2\psi \\ \cancel{-}\sin\psi\cos\psi \end{pmatrix} d\theta\, d\psi$$

$$\left(\vec f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2y+2x \\ -2x \\ -2z-3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= \cos\theta\sin\psi \\ y &= \sin\theta\sin\psi \\ z &= \cos\psi \end{aligned} \right)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\Big\{ \underbrace{-2\sin\theta\cos\theta\sin^3\psi} + 2\cos^2\theta\sin^3\psi \underbrace{-2\cos\theta\sin\theta\sin^3\psi}$$
$$-2\sin\psi\cos^2\psi - 3\sin\psi\cos\psi \Big\}\, d\theta\, d\psi =$$

$$\int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{2\pi} -2\underbrace{\sin 2\theta}_{=0}\sin^3\psi + 2\int_0^{\pi/2}\sin^3\psi\, d\psi\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta +$$

$$-2\int_0^{\pi/2} \sin\psi\cos^2\psi \cdot 2\pi - \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\psi\, d\psi \cdot 2\pi =$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos(2\theta)+1)\,d\theta = \pi\right)$$

$$2\pi\int_0^{\pi/2} \sin^3\psi\, d\psi - 4\pi\int_0^{\pi/2} \sin\psi\cos^2\psi - 3\pi\int_0^{\pi/2} \sin 2\psi\, d\psi$$

$\sin\psi(1-\cos^2\psi)$

$$= \underbrace{2\pi\int_0^{\pi/2} \sin\psi\, d\psi}_{2\pi} - \underbrace{6\pi\int_0^{\pi/2} \sin\psi\cos^2\psi}_{-6\pi\cdot\frac{1}{3}} - \underbrace{3\pi\int_0^{\pi/2} \sin(2\pi)\,d\psi}_{-3\pi} = -3\pi$$

II

VEDIAMO SE SI PUÒ USARE STOKES ??

SI PUÒ SCRIVERE $\vec{f} = \text{rot}\,\vec{F}$ con $\vec{F} = ??$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -2y+2x \\ -2x \\ -2z-3 \end{pmatrix}$$

CONDIZIONE NECESSARIA: $\text{div}\,\vec{f} = 0$

$$\text{div}\,\vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}(-2y+2x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2x) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z-3) =$$

$$2 + 0 - 2 = 0$$ TORNA

DATO CHE $\vec{f}$ è definito su $\mathbb{R}^3$ (FORTEMENTE CONNESSO)

ESISTE $\vec{F}$ tale da $\vec{g} = \text{rot}\,\vec{F}$. Proviamo a trovarlo

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{rot}\,F = \left(F_{3y} - F_{2z} \,,\, F_{1z} - F_{3x} \,,\, F_{2x} - F_{1y} \right)$$

DEVO VERIFICARE

$$F_{3y} - F_{2z} = -2y + 2x$$
$$F_{1z} - F_{3x} = -2x$$
$$F_{2x} - F_{1y} = -2z - 3$$

a TORNIAMO DOMANI $\circledast$

VERIFICHIAMO CHE $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -2xz \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} F_{3y} - F_{2z} &= D_y(x^2 - y^2) - D_z(-2xz) = -2y + 2x \\ F_{1z} - F_{3x} &= D_z(3y) - D_x(x^2 - y^2) = -2x \\ F_{2x} - F_{1y} &= D_x(-2xz) - D_y(3y) = -2z - 3 \end{aligned}\right\} \text{TORNA}$$

DUNQUE Posso calcolare l'integrale di prima mediante Stokes:

$$\iint_S \vec{g}\cdot\vec{v}\, d\sigma = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

dove

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \vec{F}(-\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\cdot(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3\sin\theta \\ -2\cos\theta\cdot 0 \\ x^2(\theta) - y^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \int_0^{2\pi} -3\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= -3\pi$$