Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 60, 13 maggio 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

ESEMPI DI INTEGRALI DI SUPERFICIE

(1) $\int_S |x| \, d\sigma \qquad S = \{ z^2 - x^2 + y^2 = 1 , \, z \geq 0 , \, 2x^2 + y^2 \leq 1 \}$

Devo cercare una "rappresentazione" di S

Se $(x,y,z) \in S$

$$z^2 = 1 + x^2 - y^2 , \qquad z \geq 0 \iff \underbrace{z = \sqrt{1 + x^2 - y^2} , \; 1 + x^2 - y^2 \geq 0}$$

INOLTRE $\underbrace{(x,y) \in D , \text{ dove } D_1 = \{ 2x^2 + y^2 \leq 1 \}}$

$\Updownarrow$

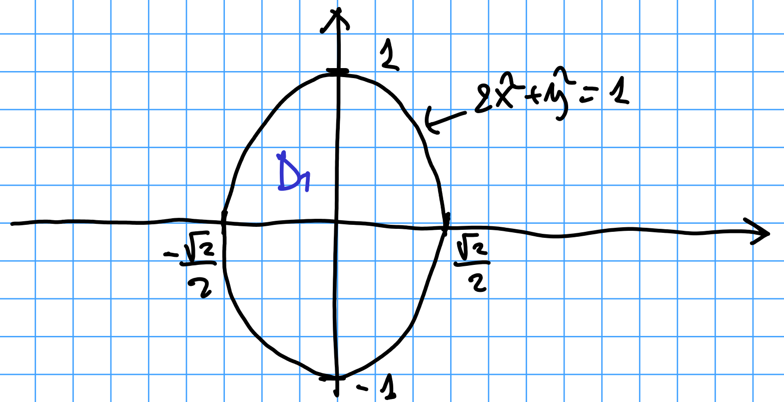
Dunque (x,y) deve verificare

$$2x^2 + y^2 \leq 1 \quad \underline{e} \quad y^2 - x^2 \leq 1$$

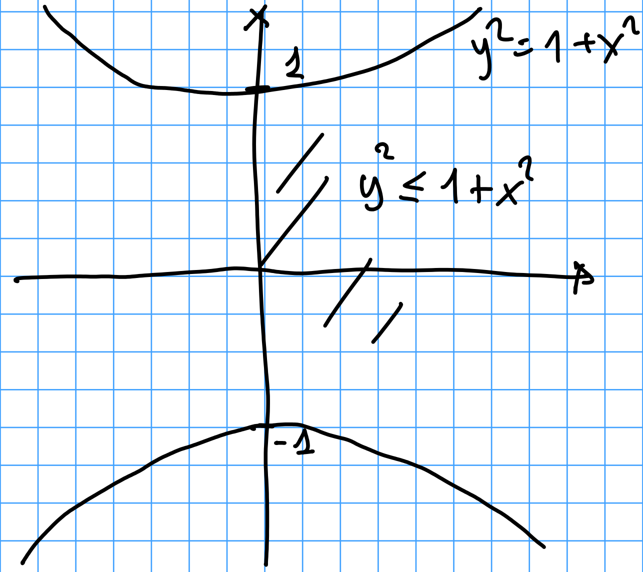
dopo di che $z = \sqrt{1 + x^2 - y^2}$

Quindi S è il grafico di $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 - y^2}$
e $D = \{ 2x^2 + y^2 \leq 1 , \, y^2 - x^2 \leq 1 \}$

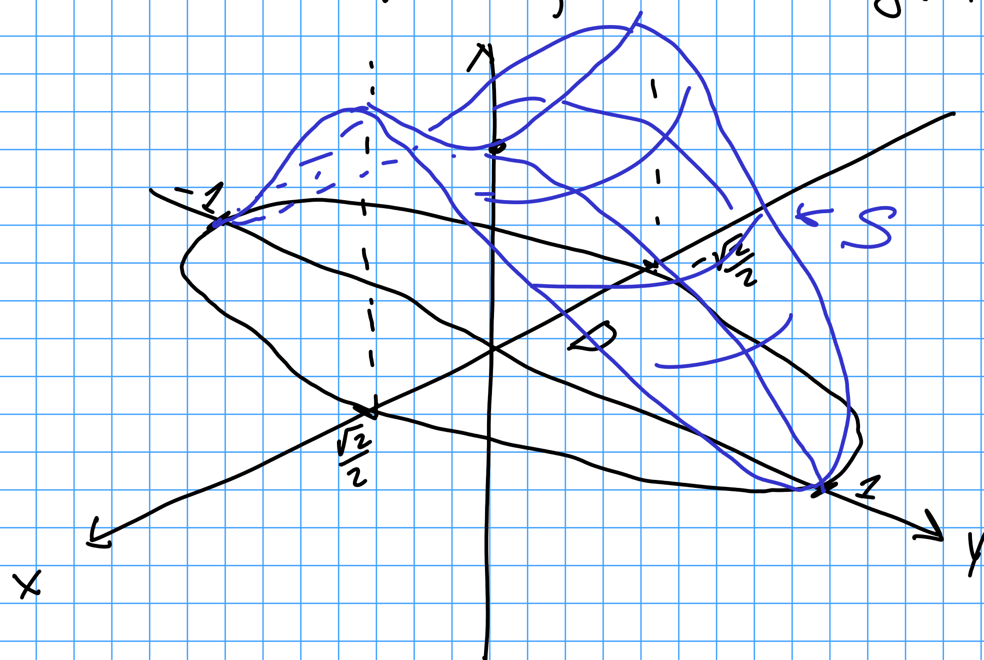
COME È FATTO D ??



$\cap$



$D = D_1 =$ ELLISSE $\{2x^2+y^2=1$ $\qquad f(x,y)=\sqrt{1+x^2-y^2}$



DEVO CALCOLARE $\displaystyle\int_S |x|\, d\sigma$ = (per la formula - FORMA CARTESIANA)

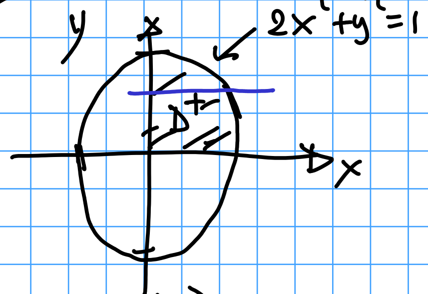
$$\left(T(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \right) \qquad f_x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2-y^2}} \qquad f_y = \frac{-y}{\sqrt{1+x^2-y^2}}$$

$$x^2 = \frac{1-y^2}{2}$$

$$\rightarrow \int_D |x| \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dx\, dy =$$

$$\int_D |x| \sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2-y^2}+\frac{y^2}{1+x^2-y^2}}\, dx\, dy =$$

$$\boxed{\int_D |x| \frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2-y^2}}\, dx\, dy}$$



(SIMMETRIA

$$= 4\int_{D^+} x \frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2-y^2}} = 4\int \left(\int_0^{\frac{\sqrt{1-y^2}}{2}} \frac{x\sqrt{1+2x^2}}{1}\, dx \right) dy$$

CAMBIO DI VARIABILE

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho \cos\theta \qquad \left(\Rightarrow 2x^2+y^2 = \rho^2 \right)$$

$$y = \rho \sin\theta$$

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho \sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\rho \cos(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J| = \frac{\rho}{2}$$

INTEGRALE =

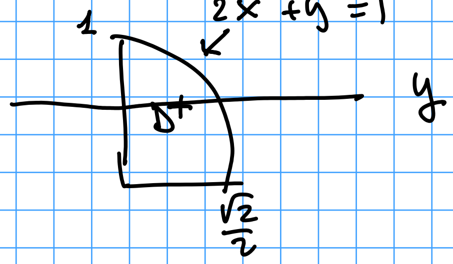
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{|\rho\cos\theta|}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{2}\rho^2\cos^2\theta}}{\sqrt{1+\frac{2\rho^2}{2}\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}}\, \frac{\rho}{2}\, d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{4}\rho^2\sqrt{\frac{1+\rho^2\cos^2\theta}{1+\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}}\, d\rho\, d\theta$$

PEGGIO DI PRIMA ¡!

$$\int_D |x| \frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

$$= 4\int_{D^+} x \frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2-y^2}}\, dx\, dy =$$



$$4\int_0^1\left(\int_0^{\frac{\sqrt{1-y^2}}{2}} x\frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2-y^2}}\, dx\right) dy = \qquad t=x^2 \qquad dt=2x\,dx$$

$$2\int_0^1\left(\int_0^{1-y^2}\sqrt{\frac{1+2t}{1-y^2+t}}\, dt\right) dy$$

È NOTO CHE L'INTEGRALE INT si può fare con la sostituz.

$$s^2=\frac{1+2t}{1-y^2+t}$$

$$s^2 = \frac{1+2t}{1-y^2+t} \iff (1-y^2)s^2 + t s^2 = 1 + 2t \iff$$

$$(s^2-2)t = 1 + (y^2-1)s^2 \iff t = \frac{1+(y^2-1)s^2}{s^2-2}$$

$$dt = \frac{(y^2-1)(\cancel{s^2}-2) - (1+\cancel{(y^2-1)s^2})}{(s^2-2)^2}\, ds^2 =$$

$$\frac{-2(y^2-1)-1}{(s^2-2)^2}\, ds^2 = \frac{1-2y^2}{(s^2-2)^2}\, ds^2 =$$

$$\frac{1-2y^2}{(s^2-2)^2}\, 2s\, ds$$

INTEGRALE $= 2\int_0^1 \left(\int_0^{1-y^2} \frac{2s \cdot s}{(s^2-2)^2}\, ds \right)(1-2y^2)\, dy = .$

(per parti)

$$2\int_0^1 \left(\left[s \, \frac{-1}{(s^2-2)} \right]_0^{1-y^2} + \int_0^{1-y^2} \frac{1}{s^2-2}\, ds \right)(1-2y^2)\, dy =$$

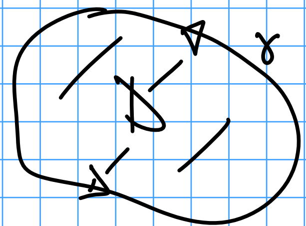
\- - - ?? (TROPPO COMPLICATO LO RICONTROLLO)

VEDI NOTA IN FONDO

VERSO IL TEOR. DI STOKES,

IN $\mathbb{R}^2$ ABBIAMO GIÀ VISTO IL SEGUENTE RISULTATO

TEOR. Dato un dominio D tale che ∂D è descritto da una curva regolare a tratti, con verso coerente con D (γ giro tenendo D a sx)



Dato $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^2$

$\vec{f}$ C^1 $\Longrightarrow$

rotore $(\vec{f})$ • normale a D

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) dx\, dy$$

(vedo $\vec{f}$ in $\mathbb{R}^3$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix}$)

si può dedurre dal teorema della divergenza applicato al campo $\begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$, dato che

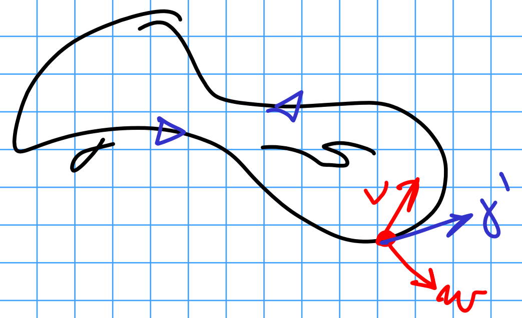
$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

e $\Phi\begin{pmatrix}-f_2\\ f_1\end{pmatrix} \underset{\text{(si vede facilmente)}}{=} \oint_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$

$\Downarrow$

TEOREMA (di Stokes)

Sia S una superficie ORIENTABILE, che abbia bordo descritto da una curva γ.



POSSO METTERE UN VERSO SU γ COERENTE CON L'ORIENTAMENTO DI S ("percorro γ tenendo S a sinistra se l'asse del mio corpo è concorde con ν")

RIGOROSAMENTE: SCELGO IL VERSO DI γ IN MODO CHE LA TERNA (w, γ', ν) sia concorde con la terna standard $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ dove ν è la normale a S, w e γ' sono ortogonali tra loro e a ν, e w PUNTA ESTERNAMENTE A S

ALLORA

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \Phi\left(\mathrm{rot}(\vec{f}), S\right) = \iint_S \left(\mathrm{rot}\,\vec{f}\cdot\vec{\nu}\right)d\sigma \qquad \|\vec{\nu}\|=1$$

UN'ALTRA FORMULA che si trova spesso

FORMULE DI GAUSS - GREEN

Date $\vec{f}, g$ definite su Ω $\quad (\Omega \subset \mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^2)$

$S =$ bordo di D

Applico il teorema della divergenza al prodotto $g\vec{f}$

NOTIAMO CHE

$$\operatorname{div}(g\vec{f}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(g f_i) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g\right) f_i + g \sum \frac{\partial}{\partial x_i} f_i$$

$$= \vec{\nabla} g \cdot \vec{f} + g \operatorname{div}(\vec{f})$$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot (g\vec{f}) = \vec{\nabla} g \cdot \vec{f} + g \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \right)$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega \vec{\nabla} g \cdot \vec{f} + \iiint_\Omega g \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \iint_S g \vec{f} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

che tradizionalmente si scrive (FORMULA DI GAUSS GREEN)

$$\iiint_\Omega g \operatorname{div}(\vec{f}) \, dx\,dy\,dz = \iint_S g \vec{f} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma - \iiint_\Omega \vec{\nabla} g \cdot \vec{f} \, dx\,dy\,dz$$

(GENERALIZZAZIONE DELL'INTEGRAZIONE PER PARTI:

$$\left(\int_a^b g f' = [g f]_a^b - \int_a^b g' f \right)$$

SPESSO SI USA LA SEGUENTE CONSEGUENZA

$$\iiint_\Omega g \Delta h \, dx\,dy\,dz = \iint_S g(\vec{\nabla} h \cdot \vec{\nu})\, d\sigma - \int \vec{\nabla} g \, \vec{\nabla} h \, dx\,dy\,dz$$

(ora h è scalare: basta usare $\vec{f} = \vec{\nabla} h$)

$$\Delta h = \boxed{\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} h} = \operatorname{div}(\nabla h)$$

FORMULE NOTEVOLI:

- $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \qquad \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} f = 0$
- $\left[\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{f}) = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{f} \right]$

(formalmente le righe II e III seguono ricordando che

$a \otimes b \cdot c$ è "ciclico"

$a \otimes b \cdot c = c \otimes a \cdot b = b \otimes c \cdot a \quad (= - b \otimes a \cdot c \; \ldots)$

$a \otimes a = 0$)

POTENZIALE VETTORE:

Dato un campo vettoriale $\vec{g}$ mi posso chiedere se esiste $\vec{F}$ tale che $\vec{g} = \mathrm{rot}\,\vec{F}$

Se trovo un tale $\vec{F}$ dico che $\vec{F}$ è un potenziale vettoriale per $\vec{g}$

FATTI (a) (dalle formule scritte prima) Se esiste un potenziale vettoriale per $\vec{g}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{div}(\vec{g}) = 0$

(b) IL VICEVERSA È IN GENERALE FALSO

IL FATTO CHE $\underbrace{\text{se } \mathrm{div}(\vec{g}) = 0 \ \exists\, \vec{F} \text{ con } \mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{g}}_{(\otimes)}$

DIPENDE DALLE PROPRIETÀ DI Ω !!

PIÙ PRECISAMENTE SE Ω È "FORTEMENTE CONNESSO"

ALLORA $\otimes$ È VERA

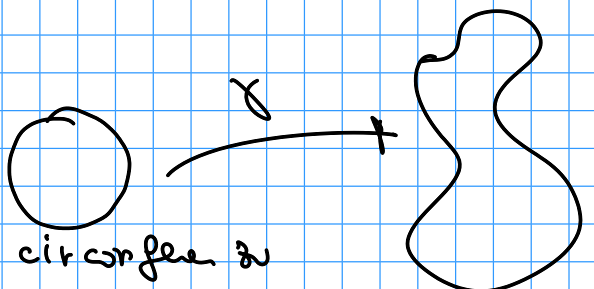
DEF Ω è FORTEMENTE CONNESSO SE OGNI SUPERFICIE OTTENUTA COME IMMAGINE DI UNA SFERA

È DEFORMABILE A UN PTO

ANALOGIA:

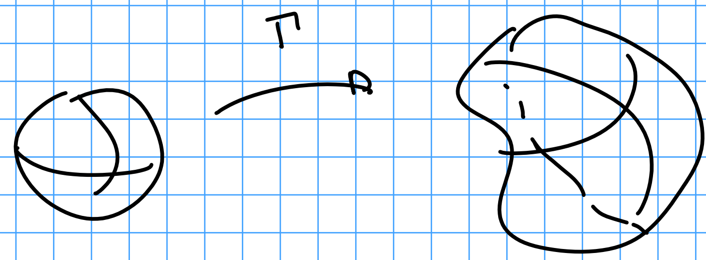
SEMPL. CONN.

OGNI CURVA CHIUSA SI DEFORMA A UN PTO



FORT. CONN.

OGNI "SUP. CHIUSA"



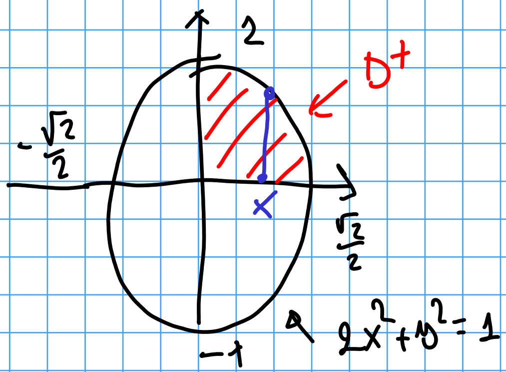
$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ NON È FORT. CONN. slaccio le curve ma non le superfici

(MA SI PUÒ DIM. CHE È SEMPL. CONNESSO)

Se Ω è stellato $\Rightarrow$ Ω è fort. connesso

NOTA (SULL'ESERCIZIO) IL TESTO CORRETTO (l'esercizio proviene da un testo d'esame del 2002/2003) ERA $\int_S |x| z \, d\sigma$. La presenza di z rende tutto più semplice, l'integrale diventa infatti

$$\int_D |x| \frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2-y^2}} \sqrt{1+x^2-y^2}\, dx\, dy = 4\int_{D^+} x\sqrt{1+2x^2}\, dx\, dy$$



$$= 4\int_0^{\sqrt{2}/2} x\sqrt{1+2x^2} \int_0^{\sqrt{1-2x^2}} 1\, dy = 4\int_0^{\sqrt{2}/2} x\,(1+2x^2)\, dx =$$

$$= 2\int_0^{1/2} (1+2x)\, dx = 2\left[x+x^2\right]_0^{1/2} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$