Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 59, 12 maggio 2014

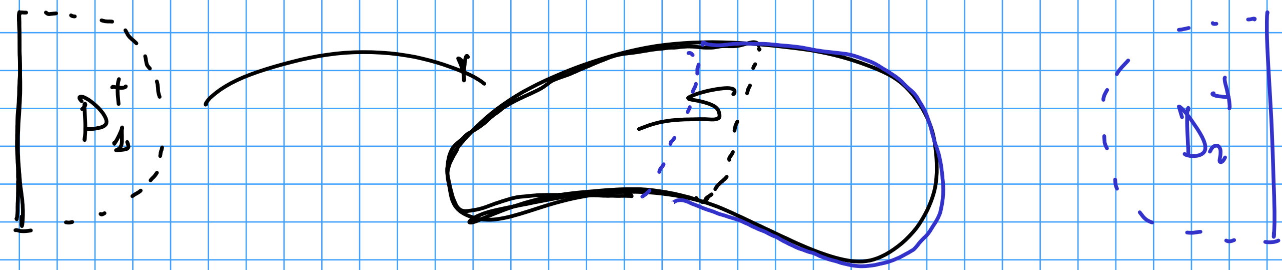
(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

PIANO DELLE ULTIME LEZIONI

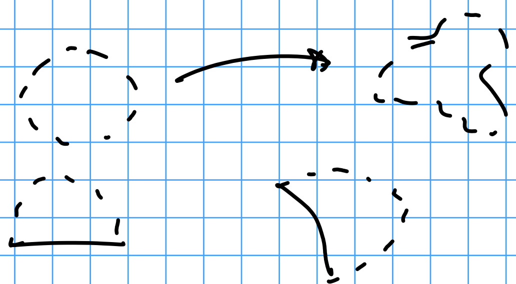
LEZIONE: LU 12, MA 13, LU 19

ESERCITAZIONI: MA 20, MA 27, altre due ... prima del compitino

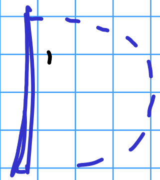
SUPERFICIE ⟶ OGGETTO OTTENUTO "INCOLLANDO TOPPE"

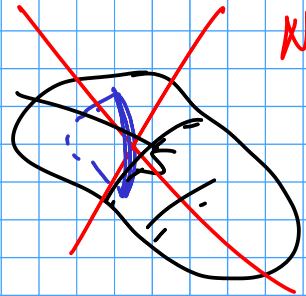


TOPPE → SENZA BORDO
TOPPE → CON BORDO



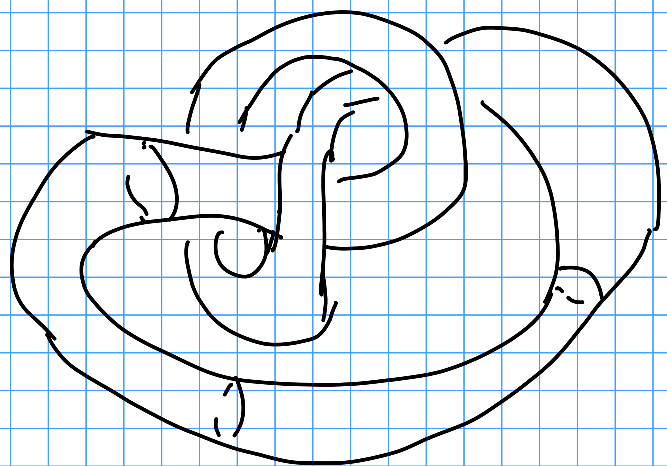
(NOTA CHE





HO CHIESTO CHE OGNI "TOPPA" $S_1 \dots S_N$ deve essere "aperto in S" cioè $S_i = A_i \cap S$ con A_i aperto in $\mathbb{R}^3$

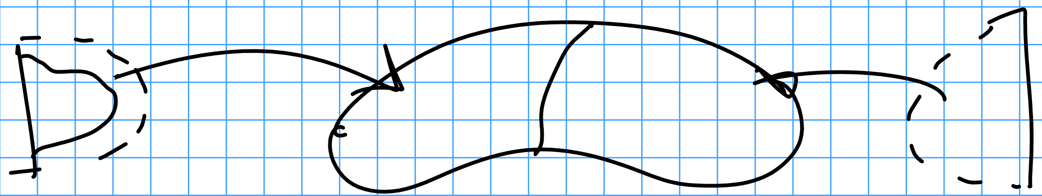
LE SUPERFICI POSSONO ESSERE COMPLICATE



FATTO Data una superficie S, ottenuta incollando $S_1 \dots S_n$ come detto sopra potete trovare $\tilde{S}_1, \tilde{S}_n$ con $\tilde{S}_i \subset \bar{S}_i$ $\tilde{S}_i \cap \tilde{S}_j \neq \emptyset$ se $i \neq j$

$$S = \tilde{S}_1 \cup \dots \cup \tilde{S}_n \qquad \tilde{S}_i = \Gamma_i(\tilde{D}) / \Gamma(\tilde{D})''$$

$$\tilde{D} \subset D / D^+$$



e definiamo $\int_S f \, d\sigma = \cup \int_{\tilde{S}_i} f \, d\sigma$ dove

$$\int_{S_i} f \, d\sigma = \int_{\tilde{D}} f(\Gamma_i) \left\| \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x} \otimes \frac{\partial \Gamma_i}{\partial y} \right\|$$

ORIENTAMENTO DI UNA SUPERFICIE !?

Dato $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ con $D \subset \mathbb{R}$

Γ regolare, $\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \neq 0$

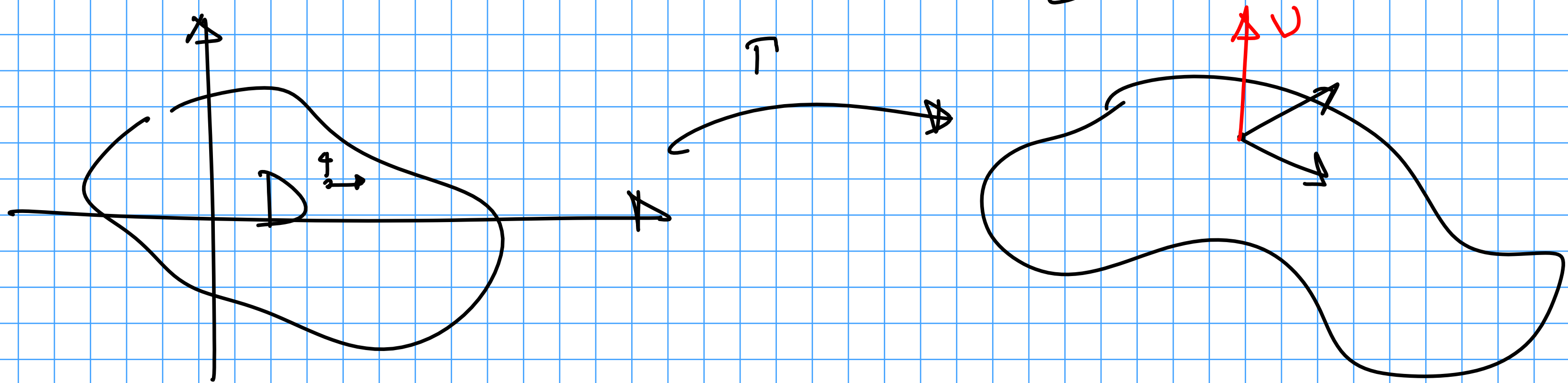
$\Rightarrow$ in ogni punto il vettore $\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = v$ è ORTOGONALE

SIA A $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ che a $\frac{\partial \Gamma}{\partial y}$ $\Rightarrow$ è ORTOGONALE

AL PIANO TANGENTE A $S = \Gamma(D)$

$\Rightarrow$ È UN VETTORE NORMALE A S CHE VARIA CON

CONTINUITÀ SU TUTTA LA SUPERFICIE

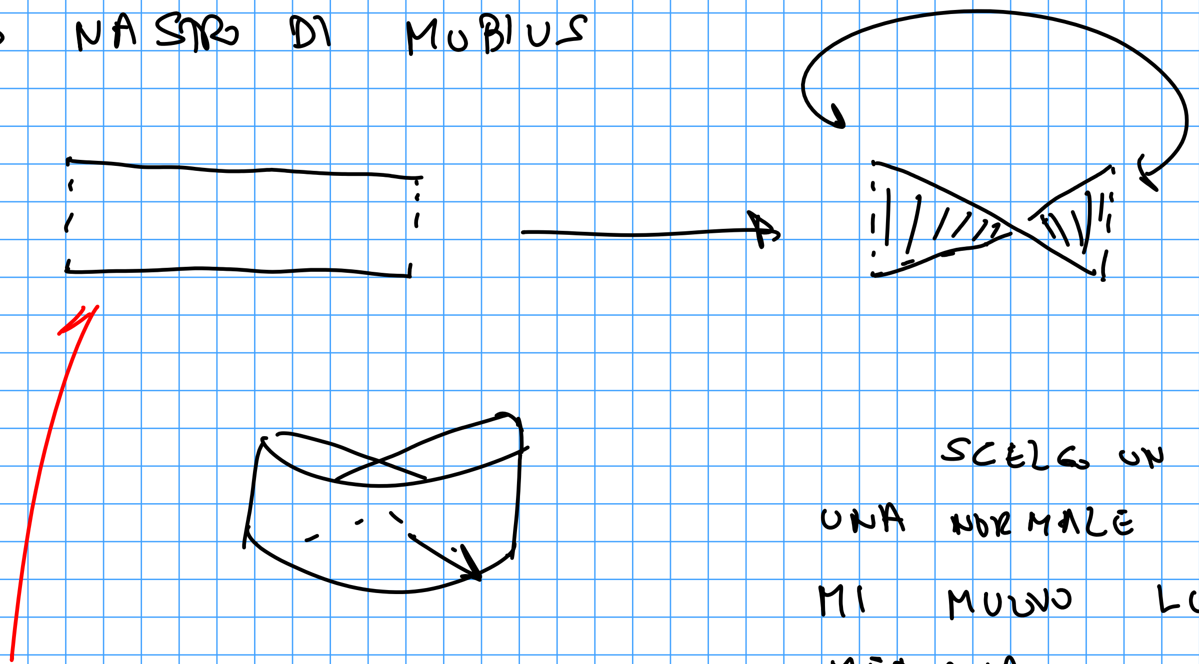


SE CONSIDERO $S = S_1 \cup \cdots \cup S_n$ SU OGNI

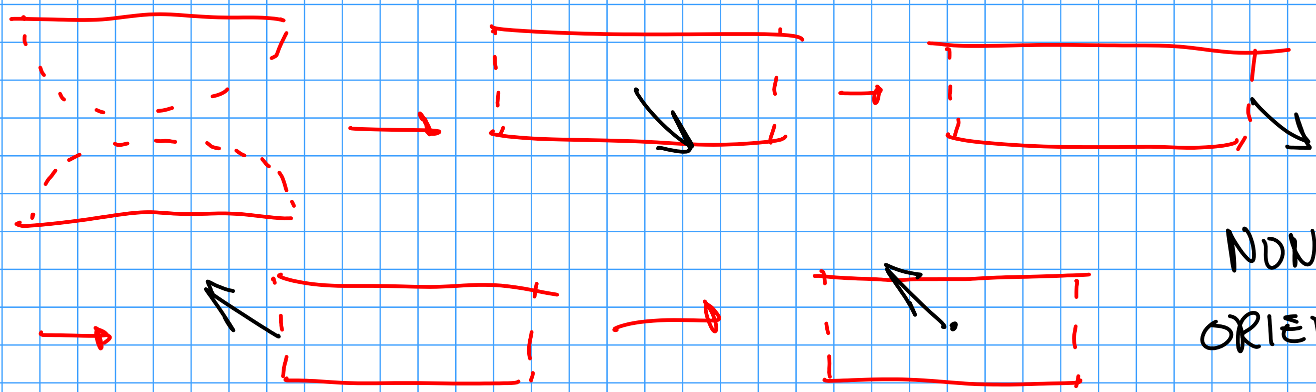
S_i posso scegliere un tale campo di vettori

NON È DETTO PERÒ CHE SI POSSA TROVARE UN CAMPO DI VETTORI NORMALI CONTINUO DEFINITO SU TUTTA S

→ NASTRO DI MÖBIUS



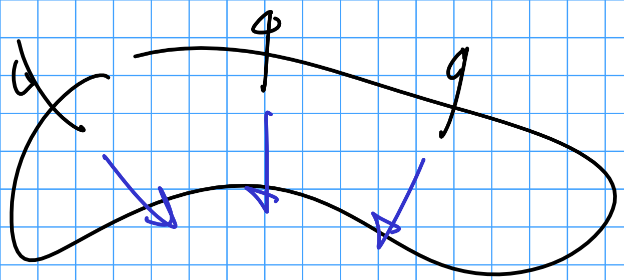
SCELGO UN PUNTO E UNA NORMALE IN QUEL PUNTO
MI MUOVO LUNGO LA LINEA MEDIANA



NON È ORIENTABILE

DEF. S è ORIENTABILE SE ESISTE UN CAMPO DI VETTORI NORMALI, CHE VARIA CON CONTINUITÀ, DEFINITO SU TUTTO S.

SE S È ORIENTABILE → SONO POSSIBILI DUE ORIENTAZIONI (TRA LORO OPPOSTE).



FATTO SE $S = \partial\Omega$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω LIMITATO (e abbastanza buono - almeno Ω aperto ...)

- S non ha bordo
- S è ORIENTABILE; IN QUESTO CASO CONVENIAMO CHE L'ORIENTAMENTO SIA FATTO DA NORMALI CHE PUNTANO ESTERNAMENTE A Ω !!

IDEA: $\Omega = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : G(\mathbf{x}) \overset{(\leq)}{<} 0 \}$

dove G è $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, regolare con $\nabla G(\underline{x}) \neq 0$ ...

$\forall \underline{x}$ con $G(\underline{x}) = 0$

$\Rightarrow$ $S = \{ \underline{x} : G(\underline{x}) = 0 \}$ è una superficie (Teorema del Dini)

e $\nu(\underline{x}) = \nabla G(\underline{x})$ fornisce un campo di vettori normali

che puntano verso l'esterno di Ω.

DEF. (FLUSSO) Sia S è una superficie orientabile

e $\vec{\nu}$ la normale UNITARIA.

Dato un campo $\vec{f}$ definito su S, a valori in $\mathbb{R}^3$

CHIAMO flusso di $\vec{f}$ su S l'integrale

$$\iint_S (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \, ds =: \Phi(\vec{f}, S)$$

OSS Supponiamo che $S = T(D)$ con $D \subset \mathbb{R}^2$.

(per es. D = disco / mezzo disco ~ IN OGNI CASO SI PUÒ RICON-

DURRE A QUESTA SITUAZIONE). Per def. di integrale di superficie

$$\Phi(\vec{f}, S) = \iint_D \vec{f}(T(x,y)) \cdot \vec{\nu}(x,y) \, \| T_x \otimes T_y \| \, dx\, dy = \otimes$$

SE INOLTRE "T è coerente con ν" $\vec{\nu}(x,y) \parallel T_x \otimes T_y$

$$\boxed{\otimes = \iint_D \vec{f}(T(x,y)) \cdot \frac{T_x \otimes T_y}{\| T_x \otimes T_y \|} \cdot \| T_x \otimes T_y \| \, dx\, dy =}$$

DUNQUE $\Phi(\vec{f}, S) = \iint_D \vec{f}(T(x,y)) \cdot T_x(x,y) \otimes T_y(x,y) \, dx\, dy$

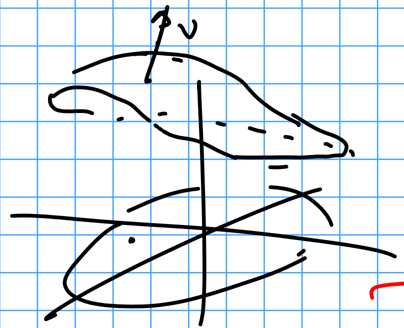
$$\left(S = T(D), \quad \nu = \frac{T_x \otimes T_y}{\| T_x \otimes T_y \|} \right)$$

CASO CARTESIANO $D \subset \mathbb{R}^2$, $g : D \to \mathbb{R}$

$S = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D, \ z = g(x,y) \}$ (= grafico di g)

IN QUESTO CASO POSSO SCEGLIERE $T(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}$

e prendo $\vec{v} = \dfrac{T_x \otimes T_y}{\|T_x \otimes T_y\|}$ ($\vec{v}$ concorde con z)

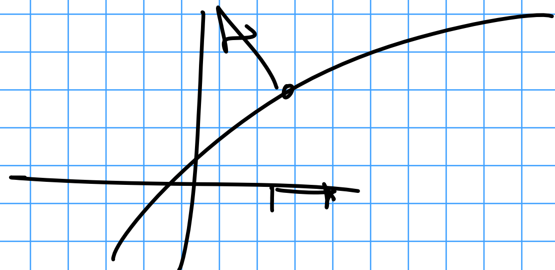


$$T_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_x \end{pmatrix} \qquad T_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_x \otimes T_y = \begin{pmatrix} -g_x \\ -g_y \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = -g_x$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = -g_x \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$



$\Rightarrow$ se $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\Phi(f,S) = \iint_D \Big[-f_1(x,y,g(x,y))\, g_x(x,y) - f_2(x,y,g(x,y))\, g_y(x,y) + f_3(x,y,g(x,y)) \Big]\, dx\, dy}$$

TEOREMA (della DIVERGENZA)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ regolare ($\Omega = \{ G(x,y,z) < 0 \}$ con G C^1 e tale che $\nabla G(x,y,z) \neq 0$ dove $G = 0$)

Si - $S = \partial\Omega$ che, come visto, è una superficie regolare
(SI PUÒ ANCHE AMMETTERE CHE Ω ABBIA SPIGOLI $\rightarrow$ S "REGOLARE A TRATTI")
orientabile (scelgo l'orientamento comune che punta verso fuori)

supponiamo che $S = \{ G(x,y,z) = 0 \}$

Se $\vec{f} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ è un campo di vettori C^1 (differenziabile con differenziale continuo) ALLORA

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{f})\, dx\, dy\, dz = \Phi(\vec{f}, S)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

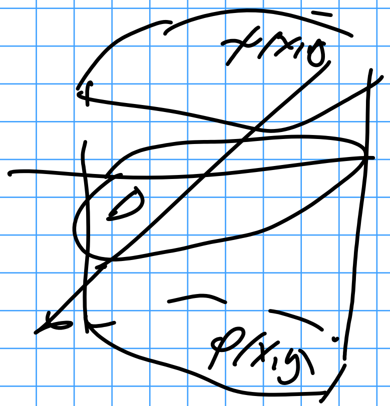
DIMOSTRAZIONE IN UN CASO SEMPLICE

Ω "NORMALE RISPETTO A OGNI ASSE" (I TRE ASSI CARTESIANI)

RICORDO CHE Ω è NORMALE RISPETTO ALL'ASSE Z

Se $\exists\ D \subset \mathbb{R}^2$, $\exists\ \varphi \leq \psi : D \to \mathbb{R}$ tali che

$$\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$



ANALOGAMENTE SI DEFINISCE QUANDO Ω È NORMALE RISPETTO A x / y

DM. POSSIAMO SCRIVERE

$$\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_1\ \ \varphi_1(x,y) \leq z \leq \psi_1(x,y)\}$$

$$\mathrm{div}(f) = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \boxed{\frac{\partial}{\partial z} f_3}$$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{D_1} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$$

$$\iint_{D_1} f_3(x,y,\psi_1(x,y))\, dx dy - \iint_{D_1} f_3(x,y,\varphi_1(x,y))\, dx dy$$

$$\overset{??}{=} \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

ANALOGAMENTE

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x} \, dx\,dy\,dz = \iint_S \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

(Ω NORMALE RISPETTO A x)

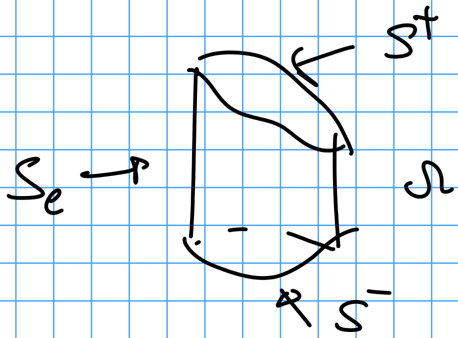
$$\iiint_\Omega \frac{\partial f_2}{\partial y} \, dx\,dy\,dz = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{\nu} \, d\sigma$$

(Ω È NORMALE RISPETTO A y)

$\Downarrow$ SOMMO

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{f}) \, dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

VERIFICHIAMO ??



$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{pmatrix}$ è PARALLELO A S_e $\Rightarrow$ $\iint_{S_e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu} = 0$

S^+ è cartesiana rispetto a $\psi_1 : D \to \mathbb{R}$.
Per quale vista

$$\iint_{S^+} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma \qquad T_x \otimes T_y = \begin{pmatrix} -\psi_x \\ -\psi_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iint_D -0 \cdot \psi_{1x} - 0 \cdot \psi_y + f_3$$ ← IL PRIMO ADDENDO IN (??)

IL SECONDO ADDENDO È $\iint_{S^-} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$

(IL MENO COMPARE PERCHÉ nella rappresentazione cartesiana ν (con ψ_1) la normale va "verso l'alto", mentre la normale uscente da Ω va verso il basso)

$\Rightarrow$ FINE DIM.

IN GENERALE SI PUÒ SPEZZARE Ω IN TANTI INSIEMI Ω_i NORMALI AI TRE ASSI — NOTO CHE SUI PEZZI DI FRONTIERA INTERNI GLI INTEGRALI SI CANCELLANO