Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 58, 6 maggio 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Integrali su superfici:

SUPERFICIE PARAMETRICA

$D \subset \mathbb{R}^2$ (dominio) $\qquad S = T(D)$

$T : D \to \mathbb{R}^3$, differenziabile con $\frac{\partial T}{\partial x} \otimes \frac{\partial T}{\partial y} \neq 0$

T INIETTIVA (l'altra volta me ne ero dimenticato ..)

(L'ipotesi $\frac{\partial T}{\partial x} \otimes \frac{\partial T}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow T$ è "LOCALMENTE" INIETTIVA

- SE VOGLIO T INIETTIVA NON POSSO RAPPRESENTARE LA SFERA S IN QUESTO MODO (DOVRÒ VEDERE S come unione di due pezzi)

DEF. Se $f : S \to \mathbb{R}$ definisco

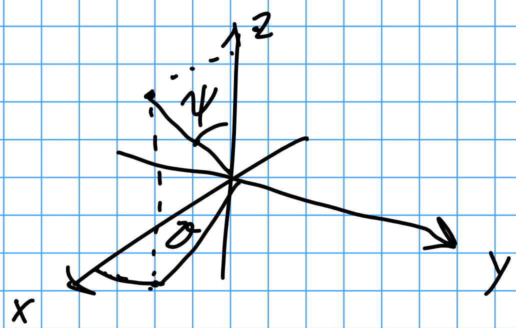
$$\int_S f \, d\sigma = \iint_D f(T(x,y)) \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(x,y) \otimes \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) \right\| dx\,dy$$

Se $f \equiv 1$ $\qquad \int_S 1 \, d\sigma =$ AREA DI S

ESEMPI (1) Area della sfera: $S = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

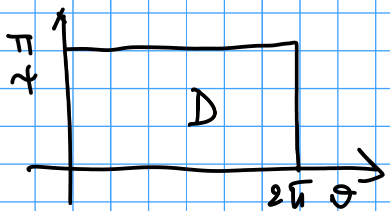
Posso introdurre una parametrizzazione di S ponendo

$$T(\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \sin(\psi)\cos(\theta) \\ \sin(\psi)\sin(\theta) \\ \cos(\psi) \end{pmatrix}$$



$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \psi \le \pi$

QUI $\quad D = \{ (\theta, \psi) \quad 0 \le \theta \le 2\pi ,\ 0 \le \psi \le \pi \}$



NOTO CHE (1) D è chiuso (2) T NON È INIETTIVA

Se prendessi $\mathring{D} = \{ 0 < \theta < 2\pi ,\ 0 < \psi < \pi \}$ $\mathring{D}$ sarebbe aperto, T iniettiva, MA $T(\mathring{D}) \neq S$, MANCA IL "MERIDIANO FOND."

È INTUITIVO CHE QUESTO MERIDIANO NON CONTRIBUISCE ALL'AREA DELLA SFERA. → POSSO calcolare Area di S integrando su D o su $\mathring{D}$ – È LO STESSO.

DUNQUE $\displaystyle A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial T}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial T}{\partial \psi} \right\| d\theta\, d\psi$. Facciamo i calcol.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} T(\theta,\psi) = \begin{pmatrix} -\sin(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\psi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} r(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) \\ \cos(\psi) \sin(\theta) \\ -\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial r}{\partial \psi} \sim \det \begin{pmatrix} -\sin(\psi)\sin(\theta) & , \cos(\psi)\cos(\theta) & , \hat{i} \\ \sin(\psi)\cos(\theta) & , \cos(\psi)\sin(\theta) & , \hat{j} \\ 0 & , -\sin(\psi) & , \hat{k} \end{pmatrix} =$$

$$\hat{i}\left(-\sin^2(\psi)\cos(\theta)\right) + \hat{j}\left(-\sin^2(\psi)\sin\theta\right) + \hat{k}\left(-\sin(\psi)\cos(\psi)\right)$$

IL MODULO $\longrightarrow$

$$\left(\sin^4(\psi)\cos^2(\theta) + \sin^2(\psi)\sin^2(\theta) + \sin^2(\psi)\cos^2(\psi)\right)^{1/2} =$$

$$\left(\sin^4(\psi) + \sin^2(\psi)\cos^2(\psi)\right)^{1/2} = |\sin(\psi)| \left(\sin^2\psi + \cos^2(\psi)\right)^{1/2}$$

$$= |\sin(\psi)| = \sin(\psi) \qquad (0 \le \psi \le \pi)$$

$$\Rightarrow \text{Area}(S) = \iint_D \sin(\psi)\, d\theta\, d\psi = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin(\psi)\, d\psi\right) =$$

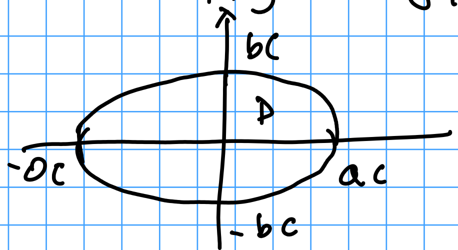
$$2\pi \underbrace{\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\pi}}_{2} = 4\pi$$

(2) AREA DI UN (PEZZO DI) PARABOLOIDE

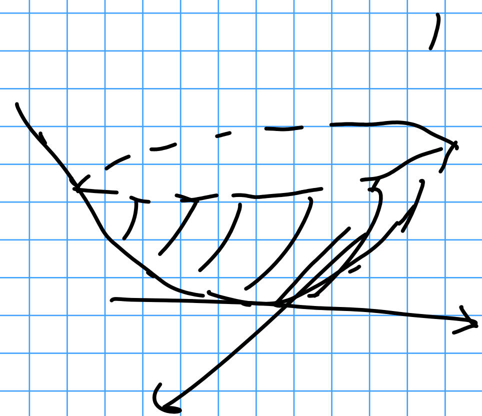
$c, a, b > 0$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$D = \{ (x,y) : f(x,y) \le c^2 \}$$



$$\frac{x^2}{a^2} = c^2$$



$S = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D, \ z = f(x,y) \}$ (GRAFICO DI f ristretto a D)

SUPERFICIE CARTESIANA

$T : D \to \mathbb{R}$ è dato da $T(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$

IN QUESTO CASO

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial y} T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} T \otimes \frac{\partial T}{\partial y} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \hat{i} \\ 0 & 1 & \hat{j} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \hat{k} \end{bmatrix} =$$

$$\hat{i}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \hat{j}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \hat{k}\,(1)$$

IL MODULO VALE $\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}^2} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$

DUNQUE (REGOLA GENERALE) se S = GRAFICO DI f

$$\iint_S g \, ds = \iint_D g(x,y,f(x,y)) \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx\, dy$$

(se $g = 1$ TROVO L'AREA)

TORNIAMO AL PARABOLOIDE DATO DA $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =$

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{2}{a^2} x \qquad \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{2}{b^2} y$$

$$\sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}} \Rightarrow$$

$$\text{Area}(S) = \iint_D \underbrace{\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}}} \,dx\,dy \qquad \left(D = \left\{ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le c^2 \right\} \right)$$

CAMBIO DI VARIABILE: $x = a\rho\cos(\theta)$, $y = b\rho\sin(\theta)$ $\left(\begin{array}{l} 0 \le \rho \le c \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}\right)$

$$J = \begin{pmatrix} -a\rho\sin(\theta) & a\cos(\theta) \\ b\rho\cos(\theta) & b\sin(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow \det J = \rho ab \det\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$= -\rho ab$ (nel modulo il meno sparisce) $\Rightarrow$

PASSO A $\quad ab \int_0^{2\pi}\int_0^{c} \sqrt{1+\left(\frac{4}{a^2}\cos^2\theta+\frac{4}{b^2}\sin^2\theta\right)\rho^2}\,\rho\,d\theta = \left(\begin{array}{l} \sigma = \rho^2 \\ 2\rho d\theta = d\sigma \end{array} \right)$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{c^2} \sqrt{1+\left(\frac{4}{a^2}\cos^2\theta+\frac{4}{b^2}\sin^2\theta\right)\sigma}\,d\sigma$$ (NON SI FA ELEMENTARMENTE)

SE $\underline{\underline{a = b}}$ (sezioni CIRCOLARI) LA COSA SI SEMPLIFICA $\rightarrow$

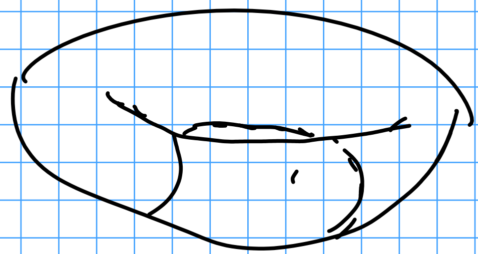
$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{c^2}\sqrt{1+\frac{4}{a^2}\sigma}\,d\sigma$$

METTIAMO $a = c = 1$

$$\to \frac{1}{2} \, 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4\sigma} \, d\sigma = \pi \left[\frac{2}{3} (1+4\sigma)^{3/2} \frac{1}{4} \right]_0^1 =$$

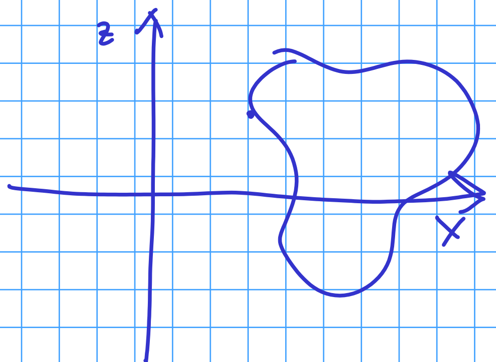
$$\frac{\pi}{6} \left(5^{3/2} - 1 \right)$$

(3) AREA DEL TORO ;



PIÙ IN GENERALE POSSO CERCARE L'AREA DI UNA "SUPERFICIE DI ROTAZIONE".

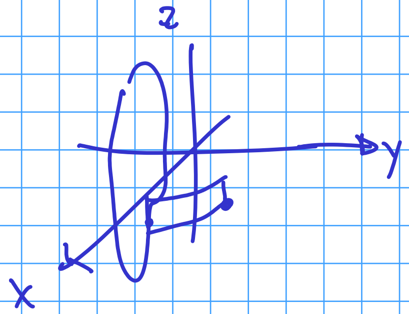
PARTO DA UNA CURVA $\gamma : [0,b] \to \mathbb{R}^2$ tale che



$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ e $x(t) \geq 0 \quad \forall t$

DEFINISCO $T(t, \theta) = \left(x(t)\cos(\theta), x(t)\sin(\theta), z(t) \right)$

$S = T(D)$ dove $D = [0,b] \times [0, 2\pi]$



VEDIAMO L'AREA !

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\cos\theta \\ \dot{x}(t)\sin\theta \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)x(t) \\ \cos(\theta)x(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \otimes \frac{\partial T}{\partial \theta} = \det \begin{bmatrix} \dot{x}(t)\cos(\theta) & -\sin(\theta)x(t) & \hat{i} \\ \dot{x}(t)\sin(\theta) & \cos(\theta)x(t) & \hat{j} \\ \dot{z}(t) & 0 & \hat{k} \end{bmatrix} =$$

$$\hat{i}\left(\dot{z}(t)x(t)\cos(\theta)\right) + \hat{j}\left(\dot{z}(t)x(t)\sin(\theta)\right) +$$

$$\hat{k}\left(\dot{x}(t)x(t)\cos^2(\theta) + x(t)\dot{x}(t)\sin^2(\theta)\right) =$$

$$\hat{i}\left(\dot{z}(t)x(t)\cos(\theta)\right) + \hat{j}\left(\dot{z}(t)x(t)\sin(\theta)\right) + \hat{k}\,\dot{x}(t)x(t)$$

FACCIO IL MODULO AL QUADRATO →

$$\dot{z}^2 x^2 \cos^2(\theta) + \dot{z}^2 x^2 \sin^2\theta + \dot{x}^2 x^2 =$$

$$\dot{z}^2 x^2 + \dot{x}^2 x^2 = x^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$$

NON C'È θ

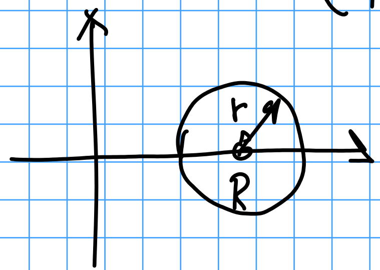
$$\Rightarrow \text{MODULO} = |x(t)|\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} = x(t)\,\|\dot{\gamma}\|$$

DUNQUE TROVO LA FORMULA

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b x(t) \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}}_{\|\dot{\gamma}\|} = 2\pi \int_\gamma P_x(\gamma)\, ds$$

NEL CASO DEL TORO $\gamma(t) = \begin{pmatrix} R + r\cos(t) \\ R + r\sin(t) \end{pmatrix}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

dove $r < R$



$\dot{\gamma}(t) = r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = r \quad \Rightarrow$

$$\text{Area}(\text{Toro}) = 2\pi \int_0^{2\pi} r\left(R + r\cos(t)\right) dt$$

$$\boxed{4\pi r R +} \; \underbrace{2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \cos(t)\, dt}_{=0}$$

BORDO DI UNA SUPERFICIE ??

• SE $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$ $\Rightarrow$ S NON HA PARTE INTERNA IN $\mathbb{R}^2$, $S=\partial B$ (IN $\mathbb{R}^3$!!)

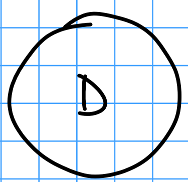
PERÒ È NATURALE PENSARE CHE S NON ABBIA BORDO (COME SUPERFICIE BIDIMENSIONALE)

• $S^+=\{x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$ (EMISFERO NORD, EQUATORE COMPRESO)

È NATURALE PENSARE CHE IL BORDO DI S^+ SIA L'EQUATORE $\{x^2+y^2=1 \quad z=0\}$

S^+ LO POSSO PARAMETRIZZARE MEDIANTE

$$T(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2+y^2}) \qquad x,y\in D=\{x^2+y^2\leq 1\}$$



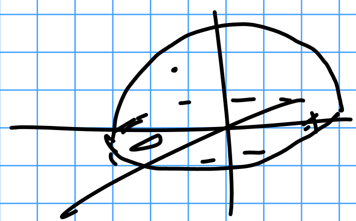


GRAFICO DELLA FUNZIONE

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

IN $\mathbb{R}^2$ $\partial D=\{x^2+y^2=1\}$

IDEA: DEFINISCO ∂S (come superficie) $= T(\partial D)$

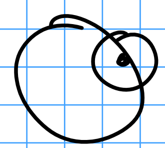
DEFINIZIONE (PARZIALE) Se S è una superficie parametrica

$T: D \to \mathbb{R}$ con D dominio chiuso $\Rightarrow$

definisco "bordo di S" come $T(\underbrace{\partial D})$

è il bordo in $\mathbb{R}^2$ - quello solito

($\partial D =$ i punti tali che ogni intorno interseca D e interseca $\complement D$)



NEL CASO GENERALE DOBBIAMO RIDISCUTERE LA DEFINIZIONE DI SUPERFICIE

DEF. Dato $S \subset \mathbb{R}^3$ $\boxed{\text{CHIUSO}}$

DICO CHE S è una SUPERFICIE SE

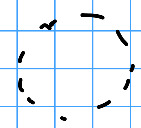
$S =$ UNIONE DI $S_1, S_2, \dots, S_n$

tali che ognuno di questi pezzi S_i è

- APERTO IN S, cioè $S_i = S \cap A_i$ con A_i aperto in $\mathbb{R}^3$
- S_i è IMMAGINE DI UNA $T_i : D_i \to \mathbb{R}^3$

DOVE D_i è UNO TRA

(I) · UN CERCHIO APERTO di $\mathbb{R}^2$: $x^2+y^2<r^2$



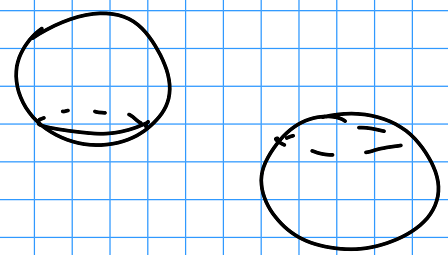
(II) · UN SEMICERCHIO di $\mathbb{R}^2$ $x^2+y^2<r^2$ $y \geq 0$

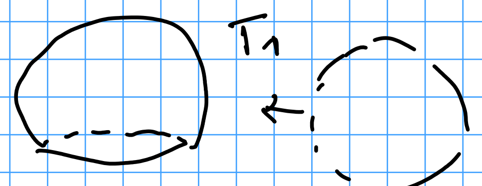
CON QUESTA DESCRIZIONE IL BORDO DI S è L'IMMAGINE DEI PUNTI CHE, NELLA SITUAZIONE II, COMPAIONO COMPAIONO COME IMMAGINE DEL SEGMENTO $\{x^2+y^2 \leq r^2, \ y=0\}$

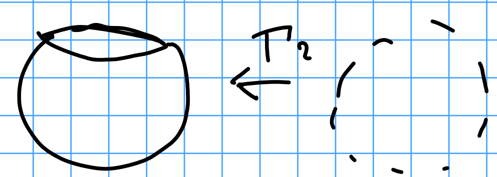
PER ESEMPIO LA SFERA $S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$ SI OTTIENE CON DUE PEZZI S_1 e S_2 che possono essere

$S_1 = \{x^2+y^2+z^2=1, \ z > -1/2\}$

$S_2 = \{x^2+y^2+z^2=1, \ z < 1/2\}$



S_1 

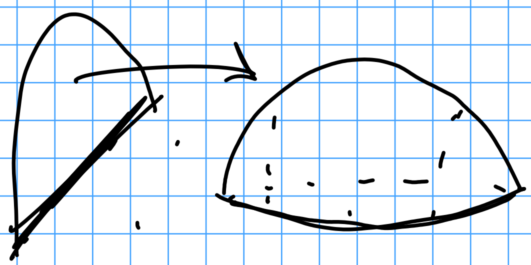
S_2 

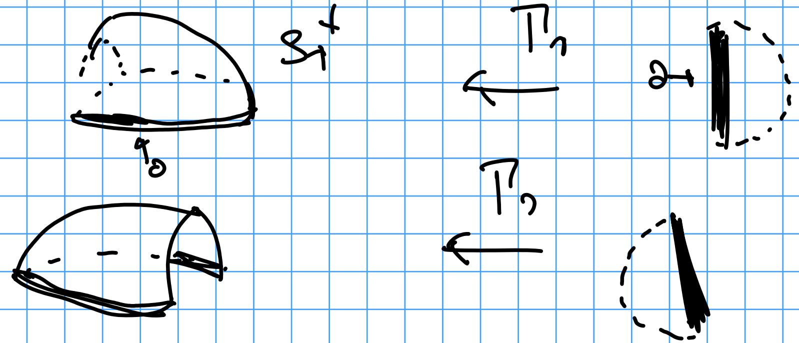
S NON HA BORDO PERCHÈ NON CI SONO PEZZI DEL TIPO II

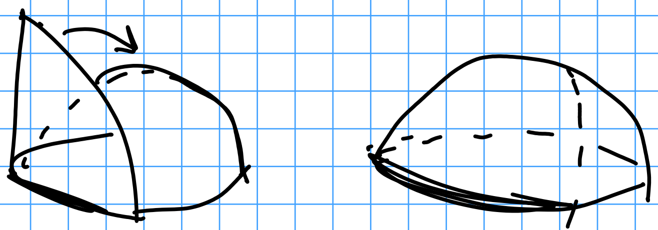
$S^+ = \{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\}$ LA RICOPRO CON DUE PEZZI S^+_1 e S^+_2

$S^+_1 = \{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0, y > -1/2\}$

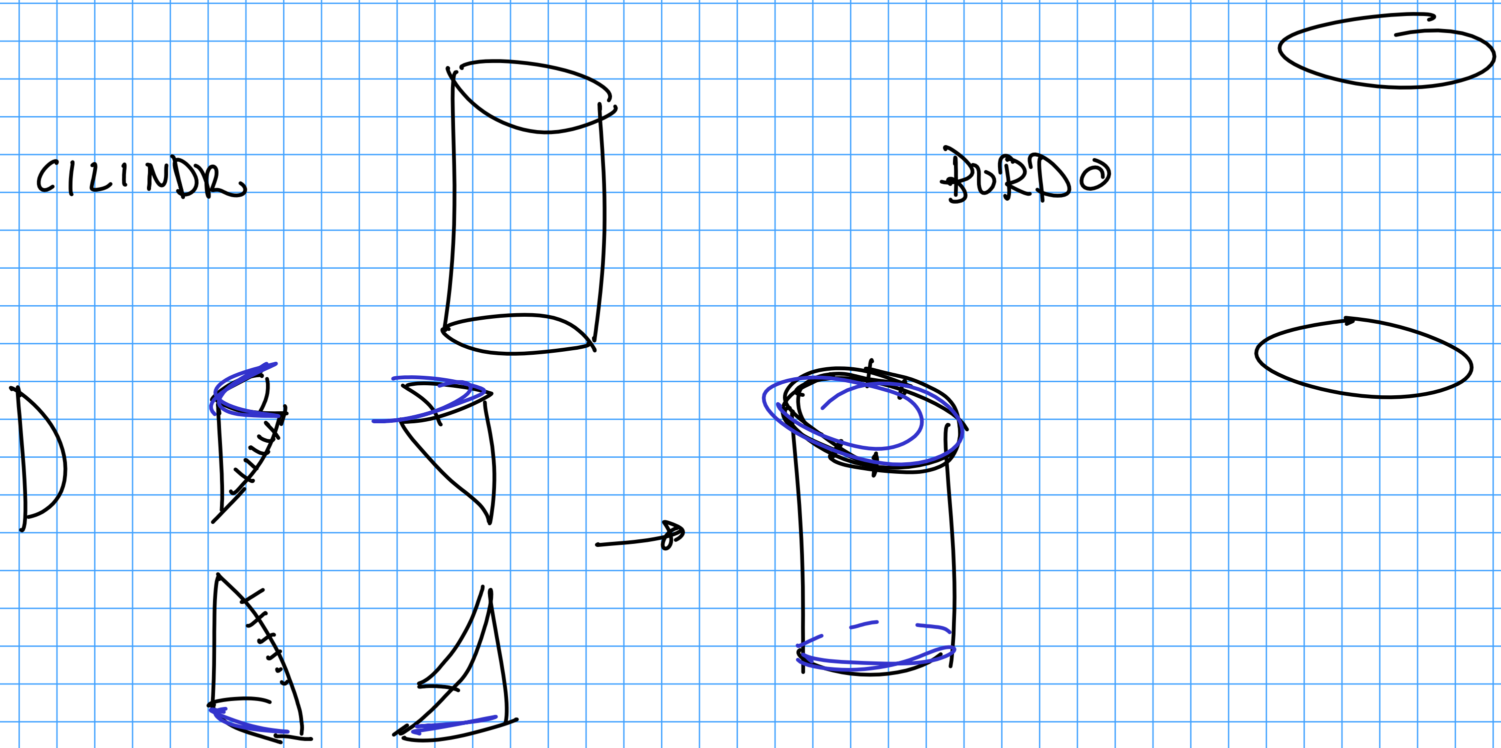
$S^+_2 = \{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0, y < 1/2\}$







$\Rightarrow$ BORDO DI S^+ = EQUATORE



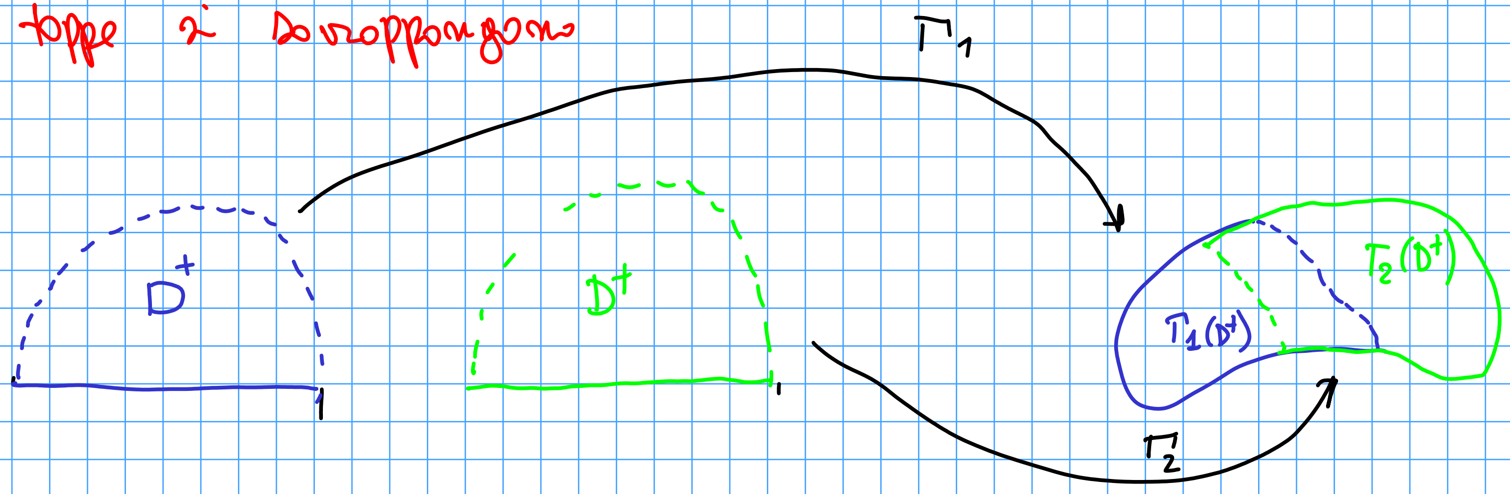
IN SOSTANZA UNA SUPERFICIE S È L'UNIONE DI UN CERTO NUMERO DI "TOPPE" $S_1 \dots S_N$ – OGNUNA DI QUESTE TOPPE S_i È DI UNO TRA QUESTI DUE TIPI:

- TIPO I – SENZA BORDO – $S_i = T_i(D)$ $D=$ cerchio aperto
- TIPO II – CON BORDO – $S_i = T_i(D^+)$ $D^+=$ semicerchio (senza la parte curva MA CON LA BASE)

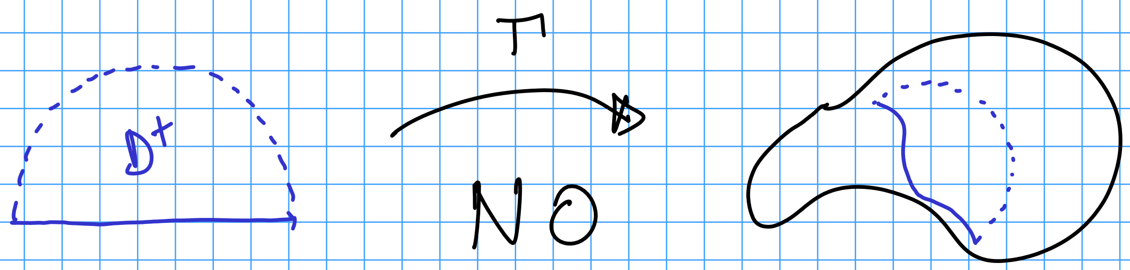
IL BORDO DI S (come superficie) è l'unione dei bordi delle toppe di tipo II.

NOTA ABBIAMO CHIESTO CHE OGNI TOPPA S_i sia ottenibile intersecando S con un aperto A_i di $\mathbb{R}^3$: $S_i = S \cap A_i$. QUESTO COMPORTA DUE FATTI:

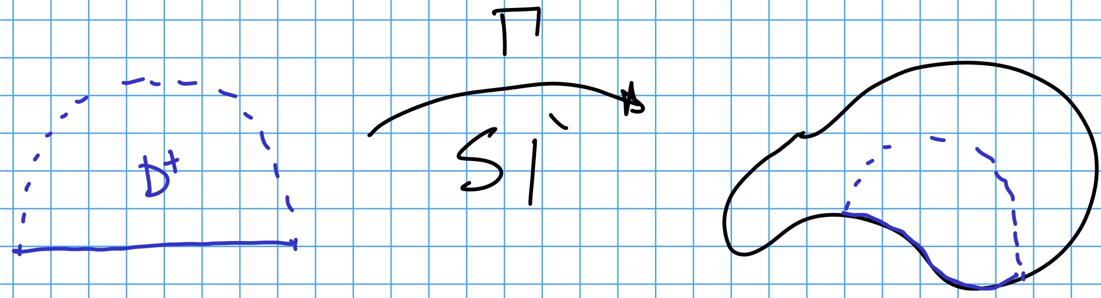
(1) Le toppe si sovrappongono



(2) I pezzi di bordo non possono "ANDARE DENTRO S"



NEL DISEGNO SOPRA $\Gamma(D^+)$ NON È "APERTO IN S"


D^+
Γ
S^1