Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 57, 30 aprile 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

INTEGRALI DI SUPERFICIE

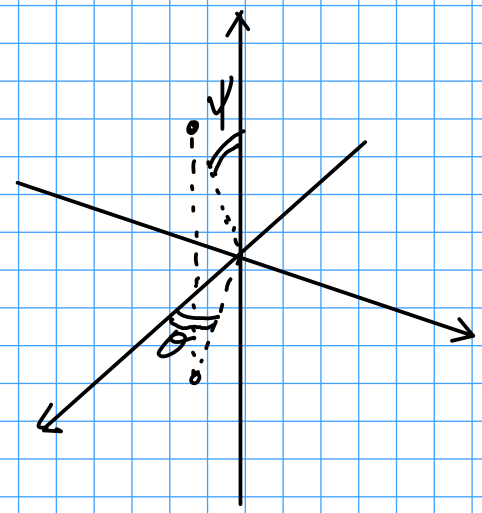
ABBIAMO TRE NOZIONI POSSIBILI DI SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^N$ (viste prima di Natale)

(a) SUPERFICIE PARAMETRICA

si considera una "mappa" (cioè una funzione) da Ω a valori in $\mathbb{R}^N$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Ω abbastanza regolare). Per esempio

$$T(\vartheta,\psi) = \left(\sin(\psi)\cos(\theta), \sin(\psi)\sin(\theta), -\cos(\psi)\right)$$

$$\Omega = \{(\vartheta,\psi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \psi \leq \pi\}$$



DESCRIVE LA SFERA DI RAGGIO 1

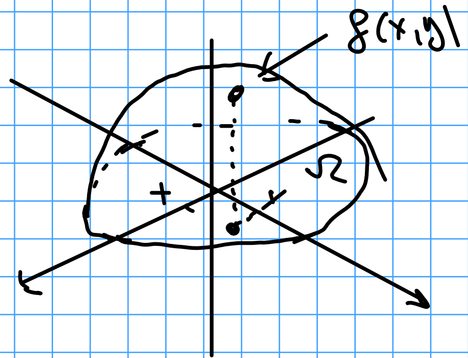
(b) SUPERFICIE CARTESIANA. Nel caso tipico $N = 3$

data una $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si considera il <u>GRAFICO</u> $G_f = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega,\ z = f(x,y)\}$

Questo è UN CASO PARTICOLARE DI (a), infatti posto $T(x,y) = (x,y,f(x,y))$ si ha subito una rappresentazione parametrica. Per esempio

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

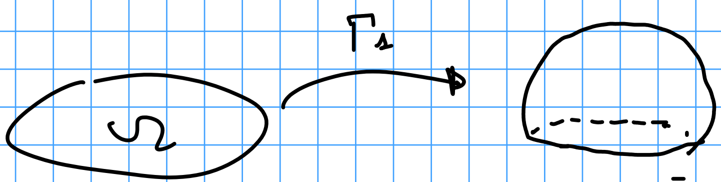
ci dà la calotta superiore della sfera unitaria

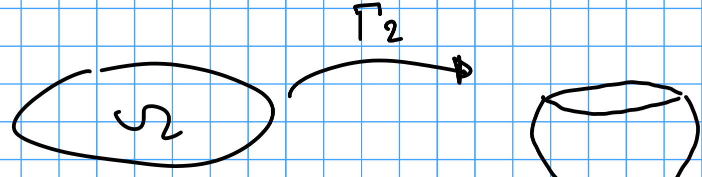


(c) FORMA IMPLICITA: Data una $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ si prende $S = \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) = 0 \}$. Per quanto visto (TEOREMA DEL DINI) se $x_0 \in S$ e se $\nabla G(x_0) \neq 0$, allora VICINO A x_0 esiste una parametrizzazione che descrive S. Per esempio

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

descrive nel senso ora detto la sfera S di raggio 1. Notiamo che, se si vuole che le parametrizzazioni siano definite su Ω aperto allora non si riesce a descrivere S con un'UNICA parametrizzazione; ce ne vorranno almeno 2, per esempio una per l'emisfero nord e una per l'emisfero sud (SE NON SI VUOLE LASCIAR FUORI l'equatore le immagini delle due mappe dovranno sovrapporsi un po')





DUNQUE, ALLA FINE, IL PUNTO DI VISTA PIÙ GENERALE È LA DESCRIZIONE PARAMETRICA, AMMETTENDO CHE UNA SUPERFICIE SIA OTTENUTA "INCOLLANDO" PIÙ MAPPE (che si "sovrappongono bene")

- INTRODUCIAMO DUNQUE LA NOZIONE DI INTEGRALE DA QUESTA PROSPETTIVA:

$$S = \{ \Gamma(x,y), \text{ dove } (x,y) \in \Omega \}$$

essendo Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ e $\Gamma : \Omega \to \mathbb{R}^N$. IN REALTÀ $\boxed{N=3}$

(per non fare cose troppo generali che a noi non servono)

- SUPPONIAMO SEMPRE CHE Γ sia DIFFERENZIABILE $\leftrightarrow$ S LISCIA

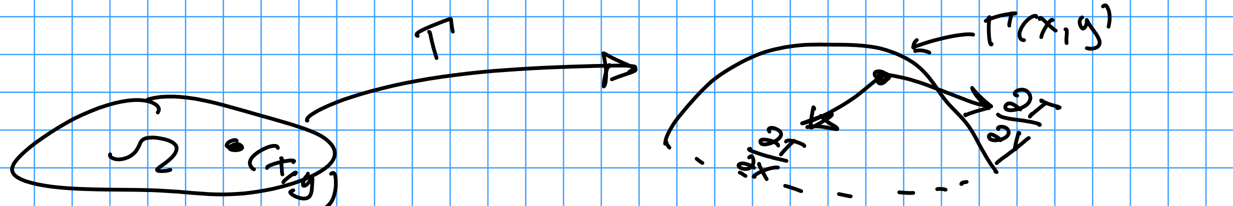
- DUNQUE $\Gamma(x,y) = (\gamma_1(x,y), \gamma_2(x,y), \gamma_3(x,y))$ e

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\gamma_1, \frac{\partial}{\partial x}\gamma_2, \frac{\partial}{\partial x}\gamma_3 \right)$$

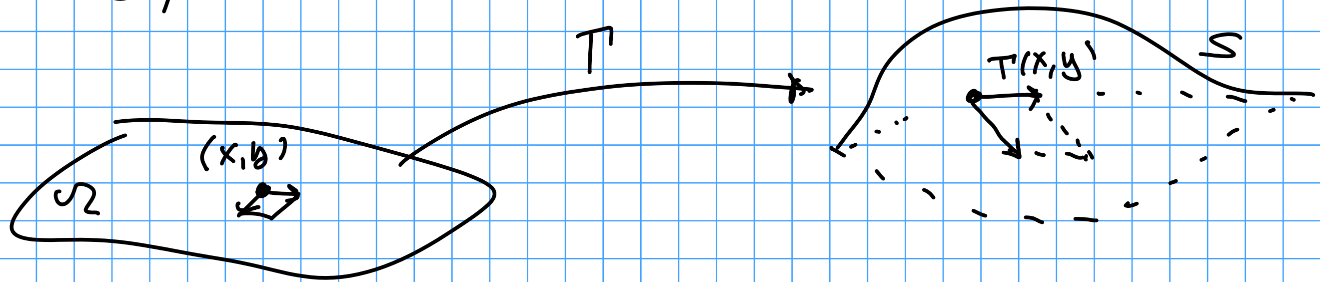
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1, \frac{\partial \gamma_2}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\gamma_3 \right)$$

IPOTIZZEREMO SEMPRE CHE $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial y}$ siano lin. indipendenti in ogni pto $\iff \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \neq 0$

sono due vettori di $\mathbb{R}^3$ che GENERANO IL PIANO TANGENTE a S (nel punto $\Gamma(x,y)$)



- Se si prende il prodotto vettoriale $\frac{\partial T}{\partial x} \otimes \frac{\partial T}{\partial y}$ (che stiamo supponendo non nullo per avere l'esistenza del piano tangente), otteniamo un vettore ortogonale a $\frac{\partial T}{\partial x}$ e $\frac{\partial T}{\partial y}$ (e quindi ortogonale al piano tangente – DUNQUE ORTOGONALE A S), il cui modulo $\left\| \frac{\partial T}{\partial x} \otimes \frac{\partial T}{\partial y} \right\|$ rappresenta il "RAPPORTO TRA L'AREA di un



quadrettino infinitesimale in Ω e la sua immagine nel piano tangente a S, nel punto $T(x,y)$ corrispondente.

NOTA: CHIEDERE $\frac{\partial T}{\partial x} \otimes \frac{\partial T}{\partial y} \neq 0$ significa che S è veramente BIDIMENSIONALE ($\forall$ punto)

DEFINIZIONE Data S come sopra e data $f: S \to \mathbb{R}$ poniamo

$$\int_S f \, d\sigma := \iint_\Omega f(T(x,y)) \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(x,y) \otimes \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) \right\| dx\, dy$$

Nel caso $f \equiv 1$ l'integrale sopra si dice AREA di S:

$$A(S) := \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x,y) \otimes \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(x,y) \right\| dx\, dy$$

AVVISO: LUNEDÌ 5/5 NON C'È LEZIONE

(SOSPENSIONE DIDATTICA DALLE 10 alle 12)