Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 56, 29 aprile 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

RICORDO CHE, dato un'eq. diff. (sistema) del tipo

$$(S)\ \begin{cases} x' = a(x,y) \\ y' = b(x,y) \end{cases}$$

(derivo rispetto a t)

SE IL CAMPO $\vec{f}(x,y) = (-b(x,y), a(x,y))$ È CONSERVATIVO, allora, preso $F(x,y)$ potenziale per $\vec{f}$, si ha che F è un integrale primo per (S), cioè

$F(x(t), y(t))$ è costante per ogni $x(t), y(t)$ che risolve (S)

INOLTRE - se $\vec{f}$ non è conservativo può comunque succedere che esista un "fattore integrante" $\lambda(x,y)$ cioè una funzione $\lambda(x,y)$ (SCALARE) tale che

$$\vec{f}_1(x,y) = \lambda(x,y)\,\vec{f}(x,y) = (-\lambda(x,y)\,b(x,y), \lambda(x,y)\,a(x,y))$$

sia conservativo.

IN TAL CASO se F_1 è un potenziale per $\vec{f}_1$ $\Rightarrow$ F_1 è un integrale primo per (S)

DIM. Se F_1 è pol. per $\vec{f}_1$ $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} F_1(x(t), y(t)) = \nabla F_1(x(t), y(t)) \bullet (x'(t), y'(t)) =$$

$$\lambda(x,y)\left(\vec{f}_1(x,y) \bullet \left(a(x,y), b(x,y)\right)\right) = \lambda(x,y) \cdot 0$$

$\Rightarrow$ $F_1(x(t), y(t))$ è costante

ESEMPIO Dati a, b, c, d tutti > 0.

Consideriamo

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (cx - d)y \end{cases}$$

MODELLO PREDATORE - PREDA
(EVOLUZIONE NEL TEMPO)
$x \longrightarrow$ PREDA
$y \longrightarrow$ PREDATORI

NOTA: MI INTERESSANO SOLUZIONI $x(t) > 0$, $y(t) > 0$

Cerchiamo un integrale primo per il sistema sopra.

Vediamo se $\vec{f}(x,y) = ((d - cx)y, (a - by)x)$ è

IRROTAZIONALE su $Q = \{x > 0, y > 0\}$

NON FUNZIONA: $\frac{\partial}{\partial y}(d-cx)y = d-cx$, $\frac{\partial}{\partial x}(a-by)x = a-by$

$$\neq$$

CERCO UN FATTORE INTEGRANTE $\lambda(x,y)$, cioè λ t.c.

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\lambda(x,y)(d-cx)\,y\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\lambda(x,y)(a-by)\,x\Big)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y)\,y\,(d-cx) + \lambda(x,y)(d-cx) =$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,y)\,x\,(a-by) + \lambda(x,y)(a-by)$$

UN MODO POSSIBILE DI VERIFICARE QUESTA EGUAGLIANZA
È IMPORRE

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y)\,y\,\cancel{(d-cx)} + \lambda(x,y)\cancel{(d-cx)} = 0 \\ \frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,y)\,x\,\cancel{(a-by)} + \lambda(x,y)\cancel{(a-by)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y)\,y + \lambda(x,y) = 0 & (1) \\ \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x,y)\,x + \lambda(x,y) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\rightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial y} \lambda(x,y) = - \dfrac{\lambda(x,y)}{y}$ EQ. DIFF. LINEARE OMOGENEA $\lambda' = -\dfrac{\lambda}{y}$

$$\Rightarrow \quad \lambda(x,y) = \left(\frac{y(1)}{y} = \right) \frac{c(x)}{y}$$

$$\lambda' = a(y)\lambda$$

$$a(y) = -\frac{1}{y}$$

$$A(y) = \int -\frac{1}{y}\, dy = -\ln(y)$$

- - - -

(2) $\rightarrow$ (stessi calcoli)

$$\lambda(x,y) = \frac{d(y)}{x}$$

DUNQUE POSSO PRENDERE $\boxed{\lambda(x,y) = \dfrac{1}{xy}}$

A QUESTO PUNTO DEVO TROVARE F_1 potenziale per

$$\vec{\gamma}_1(x,y) = \left(\frac{(d-cx)y}{xy}, \frac{(a-by)x}{xy} \right) = \left(\frac{d}{x} - c, \frac{a}{y} - b \right)$$

e cioè

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{d}{x} - c \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{a}{y} - b$$

$\downarrow$

$F_1(x,y) = d\ln(x) - cx + A(y) \qquad F_1(x,y) = a\ln(y) - by + B(x)$

$$\Rightarrow \boxed{F_1(x,y) = d\ln(x) - cx + a\ln(y) - by} \quad (+\text{costante})$$

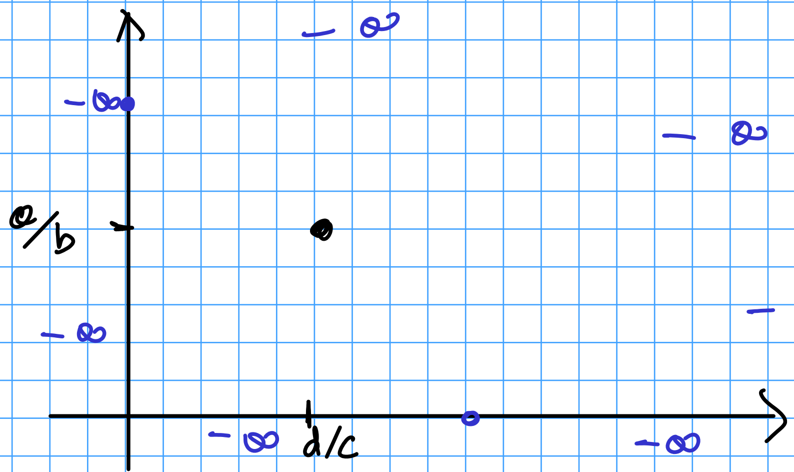
COSTANTE SULLE TRAIETTORIE

È QUINDI UTILE STUDIARE COME SONO FATTE LE LINEE DI LIVELLO DI F_1 $\longrightarrow$ STUDIAMO F_1 su $Q = (x>0,\ y>0)$

(1) LIMITI DI $F_1(x,y)$ quando $(x,y) \to \partial Q$ e

gli assi x e y (positivi)

quando $\|(x,y)\| \to \infty$



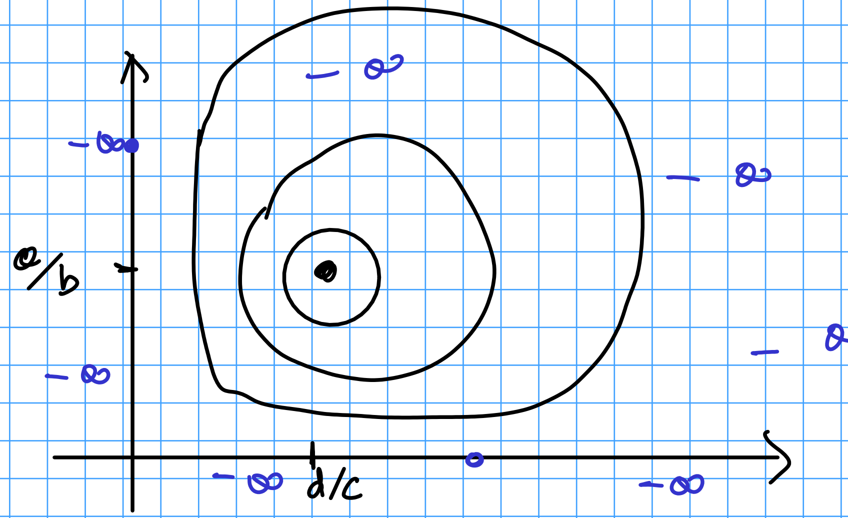
$\rightsquigarrow$ DEVE ESSERCI UN PTO DI MAX

(NO MINIMO ASSOLUTO)

(2) $\nabla F_1(x,y) = \left(\frac{d}{x} - c,\ \frac{a}{y} - b\right) \Rightarrow$ L'UNICO PTO STAZ.

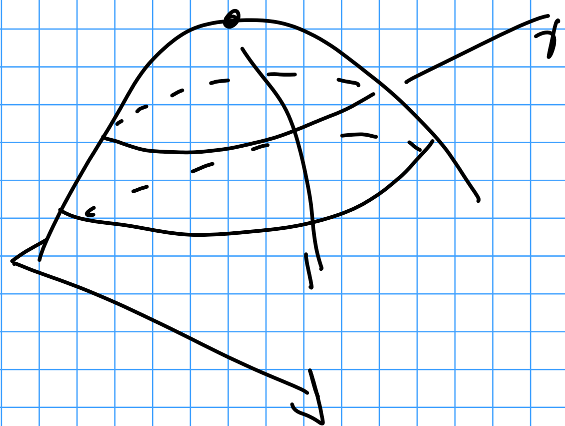
È $(x_0, y_0) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$

È IL MAX !!



← SONO TUTTE TRAIETTORIE PERIODICHE !!

$F_1(x,y)$ ∼



IL PUNTO $x_0 = \frac{d}{c}$ $y_0 = \frac{a}{b}$

è uno "STATO DI EQUILIBRIO" (

ALTRO DISCORSO COLLEGATO:

Prendiamo una singola equazione del I° ordine, del tipo

$$y' = \frac{a(x,y)}{b(x,y)} \quad (E)$$

(con $b(x,y) \neq 0$ e $\frac{a}{b}$ lipschitziana)

Se il comp

$\vec{f}(x,y) = (a(x,y), -b(x,y))$ è conservativo $\Longrightarrow$

ogni potenziale $F(x,y)$ di $\vec{f}$, è un integrale I° per (E)

INFATTI $\quad \gamma(x) = (x, y(x))$

$$\frac{d}{dx} F(\underbrace{x, y(x)}_{\gamma(x)}) = \nabla F(x, y(x)) \cdot \gamma'(x) =$$

$$(a(x,y), -b(x,y)) \cdot (1, y'(x)) =$$

$$(a, -b) \cdot \left(1, \frac{a}{b}\right) = a - \cancel{b}\frac{a}{\cancel{b}} = 0$$

ANCHE $\vec{f}_1$ NON È CONSERVATIVO, PUÒ DIVENTARLO SE TROVO UN FATTORE INTEGRANTE, cioè una funzione $\lambda(x,y)$ tale che $\vec{f}_1 = \lambda \vec{f}$ sia conservativo.

IN TAL CASO È ANCORA VERO CHE UN POTENZIALE F_1 per $\vec{f}_1$ è un' int. primo per (E)

(questo è evidente, dato che $\dfrac{a(x,y)}{b(x,y)} = \dfrac{\lambda(x,y)\, a(x,y)}{\lambda(x,y)\, b(x,y)}$)

ESEMPI

(1)

$$y' = \frac{y}{x\,(y^2 - \ln(x))} \qquad \left(\begin{array}{l} x>0 \quad y^2-\ln(x)\neq 0 \\ y^2 \neq \ln(x) \qquad = - \\ x<1 \ \text{o} \ x\geq 1 \ \text{e} \ y\neq \pm\sqrt{\ln(x)} \end{array} \right)$$

per provare ad applicare quanto detto sopra, devo decidere chi sono $a(x,y)$ e $b(x,y)$, se prendo $a(x,y) = y$
$b(x,y) = x\,(y^2 - \ln(x))$ NON TORNA

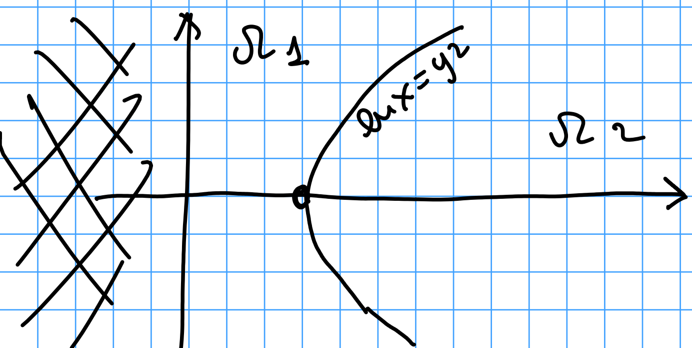
$$\frac{\partial}{\partial y} a = 1 \neq -\frac{\partial b}{\partial x}$$

INVECE se prendo $a(x,y) = \frac{y}{x}$ $\quad b(x,y) = y^2 - \ln(x) \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y} a(x,y) = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial}{\partial x} b(x,y) = -\frac{1}{x}$$

TORNA ! $\quad (a, -b)$ è irrotazionale

$\Downarrow$



è conservativo su ognuna delle due componenti di
$\Omega = \{x>0,\ \ln x \neq y^2\}$

Ω_1 e Ω_2 sono semplicemente connessi (si vede ..)

<u>ci sono</u> potenziali su Ω_1 e Ω_2

CERCHIAMO $F(x,y)$ tale che:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{y}{x} \qquad \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \ln(x) - y^2$$

$$\Uparrow$$

$$F(x,y) = y \ln x + A(y)$$

$$\Downarrow$$

Lo derivo rispetto a y: $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \ln(x) + A'(y)$

dunque $A'(y) = -y^2 \iff A(y) = -\frac{y^3}{3} + c \implies$

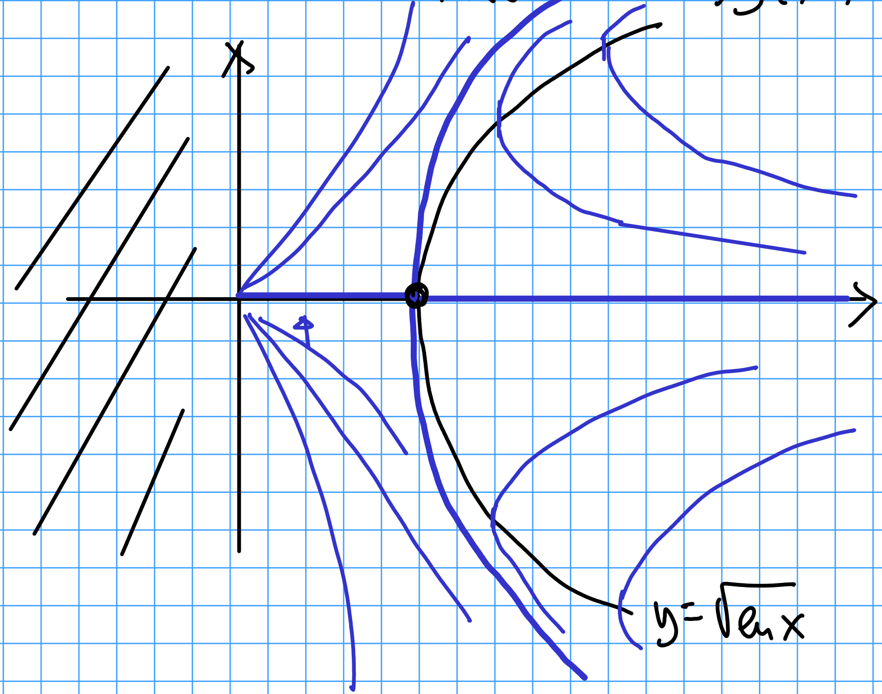
$$F(x,y) = y \ln(x) - \frac{y^3}{3}$$

DA QUANTO DETTO, ABBIAMO CHE LE SOL. DELL'EQ.

SONO DATE DALLA RELAZIONE (IMPLICITA)

$(*)$ $$y \ln(x) - \frac{y^3}{3} = c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

se $c=0$ trovo $y(x)=0$ e $y(x)=3\sqrt{\ln(x)}$



$$y' = \frac{y}{x(y^2-\ln(x))}$$

$$y\ln(x) = \frac{y^3}{3}$$

$$x = e^{\frac{c}{y}+\frac{y^2}{3}}$$ / $x=0$ c'è anche $y=0$

(3) $$y' = -\frac{4xy\ln y - 3y}{x^2} \qquad x, y > 0$$

Prendo $a(x,y) = 4xy\ln(y) - 3x$
$b(x,y) = x^2$

$$\left(y' = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)} \right)$$

Se faccio i conti vedo che $\vec{f}(x,y) = (a(x,y), b(x,y))$

NON È CONSERVATIVO. Cerco un fattore integrante λ

$\Rightarrow$ TROVO

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y)(4xy\ln(y)-3y) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x,y)x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y)\left(4xy\ln|y|-3y\right) + \lambda(x,y)\left(4x\ln(y)+4x-3\right) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x,y)\,x^2 + 2x\,\lambda(x,y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(4\,y\ln(y)-3y\right)\left(x\frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y)+\lambda(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x,y)x^2 - 2x\,\lambda(x,y)$$

Per trovare λ posso imporre

$$x^2\frac{\partial}{\partial x}\lambda(x,y) = 2x\,\lambda(x,y) \quad\longleftrightarrow\quad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{2\lambda}{x}$$

$$y\frac{\partial\lambda}{\partial y}(x,y) = -\lambda(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = -\frac{\lambda}{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda(x,y) = \frac{x^2}{y}}$$

QUINDI DEVO TROVARE F_1 POTENZIALE PER

$$\vec{f}_1(x,y) = \left(\frac{x^2}{\cancel{y}} (4x\cancel{y}\ln y - 3\cancel{y}), \frac{x^2}{y} x^2 \right) = \left(4x^3 \ln y - 3x^2, \frac{x^4}{y}\right)$$

$$\Rightarrow F_1(x,y) = x^4 \ln y - x^3$$

DUNQUE LE SOL. DELL' EQ. sono date da

$$x^4 \ln y - x^3 = c \iff$$

$$y = e^{\frac{c + x^3}{x^4}}$$ al variare di $c \in \mathbb{R}$

(PROVARE A FARE I GRAFICI, CONFRONTANDO CON I SEGNI DEL TERMINE A DX NELL'EQUAZIONE)