Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 55, 28 aprile 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

DATA COMPITINO

4/6 ore 9.00

AULA F9

E IN

ALCUNI ESERCIZI

DISCUTERE SE I SEGUENTI CAMPI SONO CONSERVATIVI

CASO AFFERMATIVO TROVARE UN POTENZIALE

(1) $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} , \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right)$ $(N=2)$

su $\Omega = \{ |xy| < 1 \}$

come è fatto Ω ??

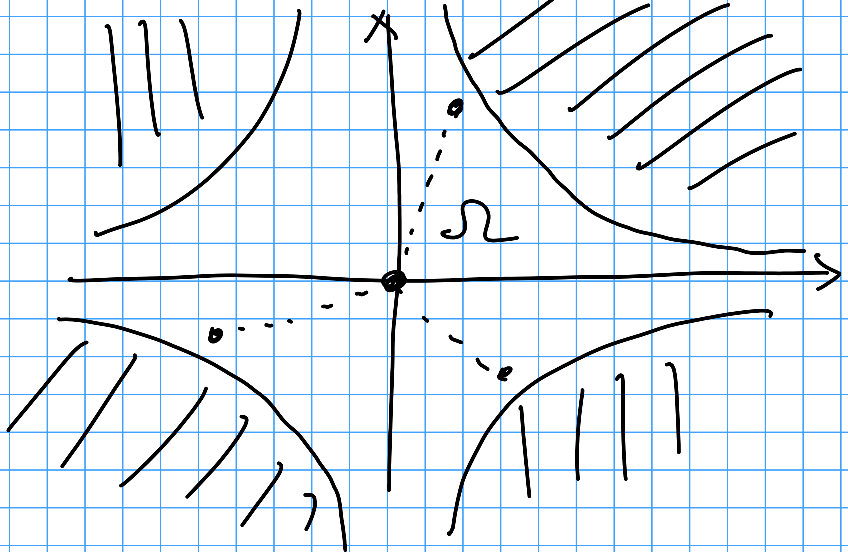
$|xy| < 1 \iff$

$x>0 \; y>0 \quad xy < 1 \iff y < \frac{1}{x}$

$x<0 \; y<0 \quad xy < 1 \iff y > \frac{1}{x}$

$x>0, y<0 \quad -xy < 1 \iff y > -\frac{1}{x}$

$x<0, y>0 \quad -xy < 1 \iff y < -\frac{1}{x}$



Ω è semplicemente connesso dato che è "stellato" rispetto all'origine

Se $\vec{f}$ è irrotazionale

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo.

Vediamo se $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} , \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right)$ è irrotazionale.

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2y^2} - y \dfrac{-\cancel{2}x^2y}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2y^2}}}{1-x^2y^2} = \frac{\dfrac{1-x^2y^2+x^2y^2}{\sqrt{1-x^2y^2}}}{1-x^2y^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$$

per simmetria (scambio x con y) trovo

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} = \frac{1}{(1-x^2y^2)^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$$

IRROTAZIONALE - cerco un potenziale $F(x,y)$

I° MODO

- $$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \Rightarrow$$

$$F(x,y) = \int \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\,dx =$$

$t = xy \quad dt = y\,dx$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) + c = \arcsin(xy) + c_1(y)$$

- $$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \Rightarrow F(x,y) = \int \frac{x\,dy}{\sqrt{1-x^2y^2}}$$

$$\left(t = xy \quad dt = x\,dy\right) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) + c = \arcsin(xy) + c_2(x)$$

- DOVENDO ESSERE EGUALI $\Rightarrow$

$$\arcsin(x,y) + c_1(y) = F(x,y) = \arcsin(xy) + c_2(x)$$

deve essere $c_1(y) = c_2(x) = c$

DUNQUE $F(x,y) = \arcsin(xy) + c \qquad c \in \mathbb{R}$

II° MODO: dato che so che $\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow$

$$F(x,y) = \int_{\gamma_{(xy)}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + c \qquad \text{dove}$$

γ_{xy} è una (qualunque) curva in Ω che congiunge $(0,0)$ a (x,y)

POSSO SCEGLIERE γ_{xy} = SEGMENTO TRA $(0,0)$ e (x,y), cioè:

$$\gamma_{xy}(t) = t(x,y) = (tx, ty) \Rightarrow \gamma'_{xy}(t) = (x,y) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

DUNQUE

$$F(x,y) = \int_0^1 \vec{f}(tx,ty) \cdot (x,y)\, dt =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{ty}{\sqrt{1-t^4x^2y^2}} \cdot x + \frac{tx}{\sqrt{1-t^4x^2y^2}} \cdot y \right) dt = \int_0^1 \frac{2xy\overset{ds}{t}}{\sqrt{1-\underbrace{t^4x^2y^2}_{s^2}}}\, dt$$

$$s = t^2xy \qquad ds = 2txy\, dt \longrightarrow$$

$$\int_0^{xy} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \Big[\arcsin(s)\Big]_0^{xy} + c = \arcsin(xy) + c$$

TORNA CON IL METODO I

ALTRO ESERCIZIO $(N=3)$

(2) $\vec{f} = \left(xy - \sin(z) \,,\, \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z} \,,\, \frac{e^y}{z^2} - x\cos(z) \right)$

definito su $\Omega = \{ (x,y,z) \;:\; z \neq 0 \}$

NOTO CHE $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ dove

$\Omega^+ = \{ z > 0 \}$ $\qquad\qquad$ $\Omega^- = \{ x < 0 \}$

CONVESSO $\qquad\qquad$ CONVESSO

Ω NON È CONNESSO, MA HA DUE "COMPONENTI CONNESSE" Ω^+ / Ω^- OGNUNA DELLE QUALI È SEMPLICEMENTE CONNESSA. AMMESSO CHE $\vec{f}$ SIA IRROTAZIONALE

$\Rightarrow$ TROVO U^+ su Ω^+ e U^- su Ω^- potenziali per $\vec{f}$

$$\Rightarrow \quad U(x,y,y) = \begin{cases} U^+(x,y,z) + c_1 & \text{se } (x,y,z) \in \Omega^+ \\ U^-(x,y,z) + c_2 & \text{se } (x,y,z) \in \Omega^- \end{cases}$$

sono tutti (e soli) dei potenziali per $\vec{f}$

PER ESEMPIO MI METTO SU $\Omega^+ = \{z > 0\}$

Vediamo se il camp è irrotazionale:

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(xy - \sin(z),\ \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z},\ \frac{e^y}{z^2} - x\cos(z) \right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy - \sin(z)\right) = x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}\right) = x$$

ok

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(xy - \sin(z)\right) = -\cos(z)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos(z)\right) = -\cos(z)$$

ok

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}\right) = \frac{e^y}{z^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos(z)\right) = \frac{e^y}{z^2}$$

ok

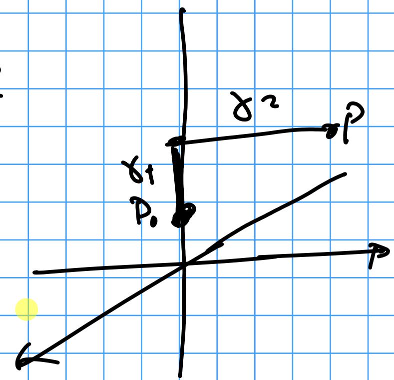
$\vec{f}$ è IRROTAZIONALE

CERCHIAMO UN POTENZIALE $F(x,y,z)$ su Ω^+

Metodo II° Prendo $P_0 = (0,0,1)$ come "punto base") e

$\gamma_{xyz}(t)$ = una curva da P_0 e $(x,y,z) = P$

γ_{xyz} la vedo come unione di due curve

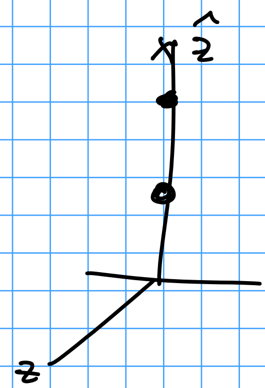


γ_1 = segmento da $(0,0,1)$ e $(0,0,z)$

γ_2 = segmento tra $(0,0,z)$ e (x,y,z)

$$F(x,y,z) = \int_{\gamma_{xyz}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

- $\displaystyle\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_1^z f_3(0,0,s)\, ds =$



$\gamma(s) = (0,0,s)$

$1 \le s \le z$

$\gamma'(s) = (0,0,1)$

$$\int_1^z \left(\frac{e^0}{s^2} - 0\cos(s)\right) ds = \left[-\frac{1}{s}\right]_1^z = -\frac{1}{z} + 1$$

se $z>1$, se no si fa in maniera analoga

- $\displaystyle\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}$

$$\gamma_2(t) = (0,0,z) + t(x,y,0) = (tx, tx, z)$$

$0 \le t \le 1$

$$\gamma_2'(t) = (x, y, 0)$$

$$\int_0^1 \left(f_1(tx, ty, z)\cdot x + f_2(tx, ty, z)\cdot y\right) dt =$$

$$\int_0^1 \left(t^2 xy - \sin(z)\right) x\, dt + \int_0^1 \left(t^2 \frac{x^2}{2} - \frac{e^{ty}}{z}\right) y\, dt =$$

$$\left[\left(\frac{t^3}{3} xy - t\sin(z)\right)x\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{6} x^2 y - \frac{e^{ty}}{z}\right]_0^1 =$$

$$\frac{x^2 y}{3} - \sin(z)x + \frac{x^2 y}{6} - \frac{e^y}{z} + \frac{1}{z} = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + \frac{1}{z}$$

$$F(x,y,z) = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z} + 1 = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + 1$$

(questa espressione si riferisce al potenziale con $F(0,0,1)=0$ - nel caso generale basta mettere $c \in \mathbb{R}$ al posto di 1)

(I° METODO)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = xy - \sin(z) \Rightarrow$$

(a) $F(x,y,z) = \frac{x^2}{2} y - x\sin(z) + c_1(y,z)$

- $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z} \Rightarrow$$

(b) $F(x,y,z) = \frac{x^2 y}{2} - \frac{e^y}{z} + c_2(x,z)$

- $$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} - x\cos(z) \Rightarrow$$

(c) $F(x,y,z) = \frac{-e^y}{z} - x\sin(z) + c_3(x,y)$

(a) + (b)

$$\cancel{\frac{x^2 y}{2}} - x\sin(z) + c_1(y,z) = \cancel{\frac{x^2 y}{2}} - \frac{e^y}{z} + c_2(x,z)$$

$$\underbrace{-x\sin(z) - c_2(x,z)}_{\text{NON C'E' } y} = \underbrace{-\frac{e^y}{z} - c_1(y,z)}_{\text{NON C'E' } x}$$

DEVE ESSERE $c(z)$

DUNQUE $c_2(x,y) = -c(z) + x\sin(z)$ / $c_1(y,z) = c(z) - \frac{e^y}{z}$

DUNQUE (da (a) e (b)) TROVO

$$F(x,y,z) = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + c(z)$$

(lo stesso si ritrova usando b)

USIAMO (c) $\Rightarrow$

$$\frac{x^2 y}{2} - x\cancel{\sin(z)} - \cancel{\frac{e^y}{z}} + c(z) = \cancel{-\frac{e^y}{z}} - x\cancel{\sin(z)} + c_3(x,y)$$

$$\underbrace{\frac{x^2 y}{2} - c_3(x,y)}_{\text{NON C'È } z} = \underbrace{-c(z)}_{\text{NON CI SONO } x,y} \quad \leftarrow \text{TUTTO} = c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{c(z) = -c} \qquad c_3(x,y) = \frac{x^2 y}{2} - c$$

$\Rightarrow$

$$F(x,y,z) = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + c$$

TORNA !!

con $c \in \mathbb{R}$

USO DEI "POTENZIALI" IN ALCUNE EQ. DIFF.

PRENDIAMO:

$$(E) \qquad Y' = F(x, Y)$$

Dove $Y(x) = (Y_1(x), \dots, Y_N(x))$

F è lipschitziana $\Rightarrow$ esistono le soluzioni ... !

DEF. Chiamo "integrale primo" di E una funzione

$U : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ che sia COSTANTE SULLE TRAIETTORIE,

CIOE' TALE CHE

$U(y_1(x), \dots, y_N(x)) = \text{costante} \quad x$

$Y = (y_1 \dots y_N)$ RISOLVE (E)

CASO AUTONOMO: $F(x,y) = F(y)$

FATTO ✓ U è un integrale primo $\Longleftrightarrow$

$$\otimes \qquad \nabla U(y_1 \dots y_N) \cdot F(y_1, \dots, y_N) = 0 \quad \forall (y_1 \dots y_N) \in \mathbb{R}^N$$

DIM. $\Leftarrow$ Supponiamo che U verifichi $(\otimes)$

Sia $Y(x) = Y_1(x) \cdots Y_N(x)$ una sol di (E).

Calcoliamo $\frac{d}{dx} U(Y(x)) = \nabla U(Y(x)) \cdot Y'(x) =$

$\nabla U(Y(x)) \cdot F(Y(x)) = 0$ per ipotesi

$\Rightarrow U(Y(x))$ è costante

($\Rightarrow$) Viceversa supponiamo che U sia un integrale primo per (E). Prendiamo un punto qualunque

$Y_0 = (Y_{0,1} \cdots Y_{0N})$ e consideriamo la soluzione $Y(x)$

di (E) con dato iniziale Y_0. ($Y(0) = Y_0$). Allora

$U(Y(x)) =$ costante $\Rightarrow \frac{d}{dx} U(Y(x)) = 0 \Leftrightarrow$

$\nabla U(Y(x)) \cdot Y'(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla U(Y(x)) \cdot F(Y(x)) \quad \forall x$

Se metto $x=0$ trovo $\nabla U(Y_0) \cdot F(Y_0)$

$\Rightarrow$ VALE (*) - dato che Y_0 è arbitrario.

ESEMPIO

Nell'equazione

$$(E_1) \qquad Y'' = \nabla F(Y) \qquad\qquad (y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N)$$

$$\Rightarrow \quad U(\dot{y}, y) = \underbrace{\frac{1}{2}\|\dot{y}\|^2 - F(y)}_{\text{ENERGIA}}$$ è un integrale I°

NOTO CHE (E_1) EQUIVALE A

$$(S_1) \quad \begin{cases} Y' = Z \\ Z' = \nabla F(Y) \end{cases} \qquad\qquad \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}' = \mathcal{F}(Z, Y)$$

e allora l'affermazione precedente diventa

$$U(Z, Y) = \frac{1}{2}\|Z\|^2 - F(Y)$$ è un int. 1° per (S_1)

Per vederlo basta verificare il criterio di Prima

$$\nabla U = (Z, -\nabla F(Y)) = \left(Z_1 \ldots Z_N, \frac{\partial F}{\partial y_1}(Y) \ldots \frac{\partial F}{\partial y_N}(Y)\right)$$

$$\mathcal{F}(Z, Y) = (\nabla F(Y), Z)$$

Dunque $\nabla U(z,y) \cdot f(z,y) =$

$$z \cdot \nabla F(y) - z \cdot \nabla F(z) = 0$$ <u>TORNA</u>

Si può anche fare direttamente:

$$y'' = \nabla F(y)$$ MOLTIPLICO PER y'

$$y'' \cdot y' = \nabla F(y) \cdot y'$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\|y'\|^2 = \frac{d}{dx}F(y) \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\|y'\|^2 - F(y)\right) = 0$$

<u>N=2</u>

t = VARIABILE INDIPENDENTE

$$\begin{cases} x' = a(x,y) \\ y' = b(x,y) \end{cases}$$

<u>SE</u> il camp. $(-b(x,y), a(x,y)) = \vec{f}$ è conservativo e se F è un potenziale per $\vec{f}$ $\Rightarrow$ F è un integrale primo per l'equazione

SUPPONIAMO INFATTI CHE

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -b(x,y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = a(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \nabla F(x,y) \cdot (a(x,y), b(x,y)) = 0$$

Dunque F è un integrale I^o

IN REALTÀ SI PUÒ CHIEDERE DI MENO

<u>FATTO</u> Supponiamo che $\exists\ \lambda(x,y)$ tale che

$$\vec{f}_1 = (-\lambda(x,y)\, b(x,y) , \lambda(x,y)\, a(x,y))$$

sia conservativo. Allora, se F_1 è UN POTENZIALE per $\vec{f}_1$, F_1 è un integral I^o per l'eq.

<u>DIM.</u> $$\frac{d}{dx} F_1(x(t), y(t)) = \nabla F_1(x,y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) =$$

$$-\lambda(x,y)\, b(x,y) \cdot a(x,y) + \lambda(x,y)\, a(x,y)\, b(x,y) =$$

$$\lambda(x,y)\left[-a(x,y)\, b(x,y) + a(x,y)\, b(x,y)\right] = 0 \quad !!$$

λ (se esiste) si chiama fattore integrante