Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 54, 15 aprile 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

FORMULA DELLA DIVERGENZA (CASO N=2 $\leftrightarrow$ LEGAME CON I CAMPI IRROTAZIONE)

DEF. In generale, dato un campo $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\vec{f}$ di classe C^1, chiamiamo DIVERGENZA di $\vec{f}$ l'espressione

$$\operatorname{div} \vec{f} := \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f_N}{\partial x_n}(x) \quad (= \vec{\nabla} \cdot \vec{f})$$

(idealmente $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right)$ (!?)

ESEMPIO IMPORTANTE

$$\operatorname{div}(\nabla F) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F = \Delta F$$

OPERATORE DI LAPLACE / LAPLACIANO

CONSIDERIAMO ORA (per noi più) $N=2$

DEF. Dato un campo $\vec{f}$ $(= (f_1, f_2))$ definito su $\overline{\Omega}$ chiamiamo FLUSSO di $\vec{f}$ su $\partial\Omega$, l'espressione

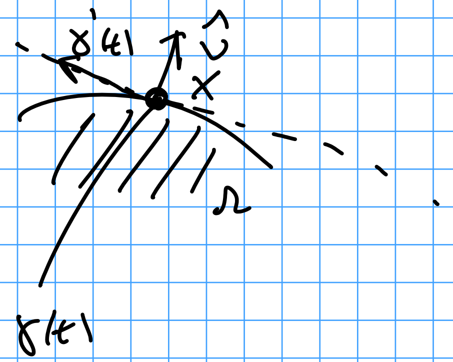
$$\int_{\partial\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{\hat{\nu}})\, ds = \int_{\gamma} (\vec{f} \cdot \vec{\hat{\nu}})\, ds \quad \text{(INTEGRALE DI 1ª specie)}$$

dove intendo che: (1) $\partial\Omega$ è descritto da una (o anche più) curve γ, chiuse e percorse coerentemente rispetto a Ω.

γ deve essere regolare a tratti (sono ammessi un numero finito di spigoli)
(negli spigoli $\hat{\nu}(x)$ non esiste - ma gli spigoli sono in numero finito ...)

(2) $\hat{\nu}(x)$ è la normale unitaria esterna $\nu^{\partial\Omega}$ nel punto $x \in \partial\Omega$

CIOÈ $\hat{\nu}(x)$ è ortogonale a $\gamma'(t)$ se $\gamma(t) = x$



SE NE DEDUCE CHE
$$\hat{\nu}(x) = \frac{\nu(x)}{|\nu(x)|}$$

dove
$$\boxed{\nu(x) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}$$

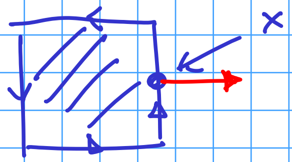
sempre con $\gamma(t) = x$

$\hat{\nu}$ è una normale esterna poiché γ è orientato "bene"

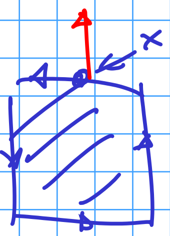
NOTA: se $\Omega = \{x : G(x) < 0\}$
$\partial\Omega = \{x : G(x) = 0\}$ $\Rightarrow$ $\hat{\nu} = \dfrac{\nabla G(x)}{|\nabla G(x)|}$

Allora se γ descrive $\partial\Omega$ $\Rightarrow$
$\varphi(t) := G(\gamma(t)) = 0$ $\Rightarrow$ derivando

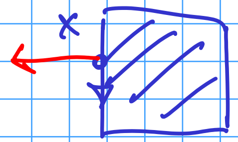
$$0 = \varphi'(t) = \nabla G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$



$\gamma'(t) = (0,1) \qquad \nu(x) = (1,0)$



$\gamma'(t) = (-1,0) \qquad \nu(x) = (0,1)$



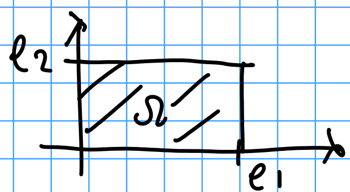
$\gamma'(t) = (0,-1) \qquad \nu(x) = (-1,0)$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA $(N=2)$ Data $\vec{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, C^1

$$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{f} \, dx\, dy = \text{flusso su } \partial\Omega \text{ di } \vec{f}$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \, ds$$

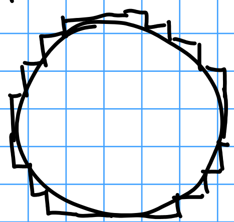
IDEA DI DIM. Se $\Omega = Q = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$



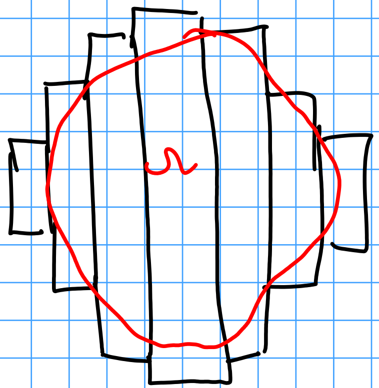
l'abbiamo visto ieri (è un calcolo piuttosto semplice)

IN GENERALE seguo l'idea mostrata nel seguente disegno:

(1) APPROSSIMO $\partial\Omega$ con dei tratti orizzontali / verticali

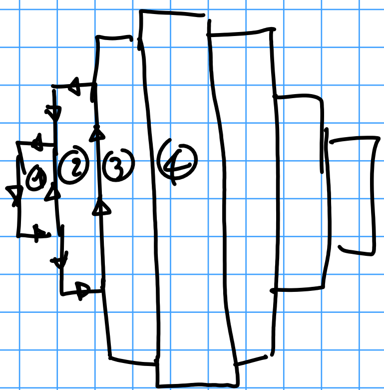


(2) Vedo il disegno sopra nel seguente modo



(3) Applico il caso semplice (dimostrato all'inizio) su ognuno dei rettangoli di sopra:

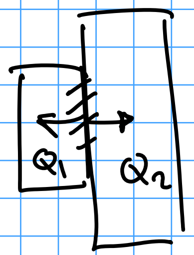
$$\iint_{Q_i} \operatorname{div} \vec{f} = \text{flusso di } \vec{f} \text{ su } \partial Q_i$$

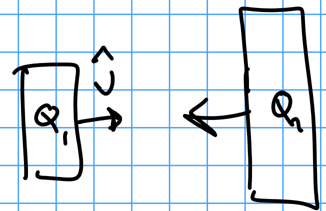


(4) SOMMANDO $\Rightarrow$

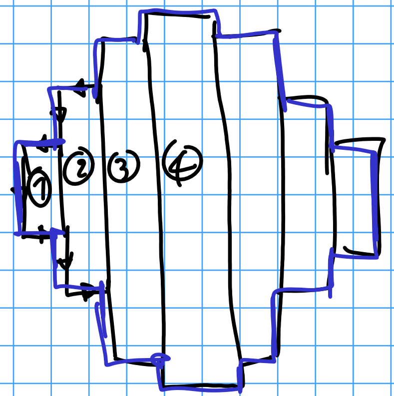
$$\int_{\cup Q_i} \operatorname{div} \vec{f} = \text{somma dei flussi di } \vec{f} \text{ su ogni } \partial Q_i$$

(5) NOTO CHE, NEI LATI COMUNI I FLUSSI SI CANCELLANO TRA LORO





RIMANE SOLO LA "PARTE ESTERNA"



DUNQUE SE $P = \cup Q_i$ HO DIMOSTRATO IL TEOREMA NEL CASO $\Omega = P$.

PASSANDO AL LIMITE (IN MANIERA ANALOGA A QUANDO SI DEFINISCE L'INTEGRALE) DIMOSTRO IL TEOREMA IN GENERALE

#

<u>OSSERVAZIONE</u> (COLLEGAMENTO CON IL ROTORE: N.B. CHE N=2)

Sia $\vec{f} = (f_1, f_2)$ e applichiamo il teorema della divergenza a $(f_2, -f_1)$:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2 = \text{flusso di } (f_2, -f_1) \text{ su } \partial\Omega =$$

$$\int_{\partial\Omega} \left(f_2 \cdot \hat{\nu}_1 - f_1 \cdot \hat{\nu}_2 \right) ds = \int_\gamma \left(f_2 \cdot \gamma_2' + f_1 \cdot \gamma_1' \right) \frac{ds}{\|\gamma'\|}$$

(dove γ descrive $\partial\Omega \Rightarrow \nu(x) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ e

$$\hat{\nu}(x) = \frac{\nu(x)}{\|\nu(x)\|} = \left(\frac{\gamma_2'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, -\frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)$$

$x = \gamma(t)$)

$$= \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

(dato che $ds = \|\gamma'(t)\|\,dt$)

IN DEFINITIVA VALE

$$\boxed{\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)dx_2\,dx_1=\int_{\gamma}\vec{f}\cdot d\vec{s}\quad (\star)}$$

NOTA CHE HO SUPPOSTO CHE $\partial\Omega$ SIA DESCRITTO DA $\underline{\underline{1}}$ solo arco γ

$\Updownarrow$ (di più dim.)

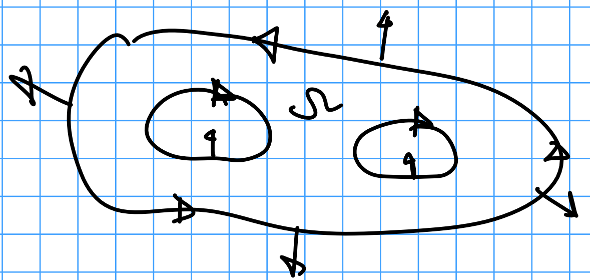
Ω è SEMPL. CONNESSO

(se Ω è limitato)

DA QUI SI PUÒ DEDURRE CHE

$\vec{f}$ IRROTAZIONALE $\Rightarrow$ $\vec{f}$ CONSERVATIVO

IN REALTÀ, SIA IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA, CHE LA FORMULA SOPRA, SI POSSONO DIM. ANCHE SE $\partial\Omega$ è descritto da più di uno arco

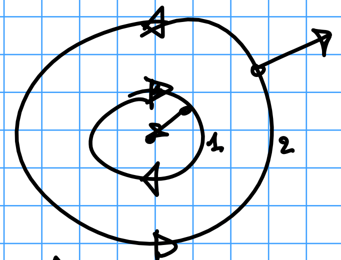


$\iint \operatorname{div}\vec{f}\,dx_1dx_2$ = "somma dei flussi su ogni γ_i"

DISCORSO ANALOGO PER LA FORMULA (★) - QUI È IMPORTANTE CHE OGNUNA DELLE CURVE $\gamma_1 \dots \gamma_k$ sia orientata coerentemente con Ω

ESEMPIO $\quad \Omega = \{(x,y) : \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

$$\partial\Omega = \underbrace{\{x^2+y^2=1\}}_{S_1} \cup \underbrace{\{x^2+y^2=4\}}_{S_2}$$



S_1 è descritto dalla curva
$$\gamma_1(t) = (\cos(t), -\sin(t)) \quad \leftarrow \quad \hat{\nu}(x,y) = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

S_2 è descritto dalla curva
$$\gamma_2(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)) \quad \leftarrow \quad \hat{\nu}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\vec{f}(x,y) = (y, x)$$

PROVIAMO A VEDERE IL TEOR. DELLA DIVERGENZA

$\operatorname{div} f = 0 \quad$ perché $\quad \frac{\partial}{\partial x} y = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} x = 0$

Se faccio $\int_{\partial\Omega} (\vec{g} \cdot \vec{\nu})\, ds$ devo:

$$\int_{\gamma_1} \vec{g} \cdot \vec{\nu}\, ds + \int_{\gamma_2} \vec{g} \cdot \vec{\nu}\, ds$$

$\gamma_1(t) = (\cos(t), -\sin(t))$

$\gamma_1'(t) = (-\sin(t), -\cos(t))$

$\|\gamma_1'(t)\| = 1$

$\hat{\nu}_1(\gamma(t)) = (-\cos(t), \sin(t))$

$\vec{g}(\gamma_1(t)) = (-\sin(t), \cos(t))$

$$\int_{\gamma_1} \vec{g} \cdot \vec{\nu}\, ds =$$

$$\int_0^{2\pi} (\underset{g_1}{-\sin(t)})(\underset{\hat{\nu}_1}{-\cos(t)}) + (\underset{g_2}{\cos(t)})(\underset{\hat{\nu}_2}{\sin(t)}) \cdot \overset{|\gamma_1'|}{1}\, dt$$

$$\int_0^{2\pi} 2\sin(t)\cos(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin(2t)\, dt = 0$$

NELLO STESSO MODO SI VEDE CHE $\int_{\gamma_2} \vec{g} \cdot \vec{\nu}\, ds = 0$

(OPPURE LO SI DEDUCE DAL TEOREMA DELLA DIVERGENZA !!)

IL DISCORSO è PIù INTERESSANTE SE PRENDO UN CAMPO SINGOLARE IN $(0,0)$; PRENDIAMO

$$\left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) =: \vec{g}(x,y) \qquad \left(\text{è ben definito sulla corona circolare}\right)$$

$$\text{div} = y\,\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} + x\,\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \left(\Omega = \{1 \le x^2+y^2 \le 4\}\right)$$

CALCOLIAMO $-\iint_\Omega \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$= -4\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 d\rho \;\rho\; \rho\,\frac{\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^4} = -4\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta}_{=0}\int_1^2 \frac{1}{\rho}\,d\rho = 0$$

DUNQUE $\boxed{\iint_\Omega \text{div}\,\vec{g}\;dx\,dy = 0}$

$$\int_{S_1} \vec{g}\cdot\hat{\vec{\nu}}\;ds =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[(-\sin(t))(-\cos(t)) + (\cos(t)\cdot\sin(t))\right]1\cdot dt$$

$\gamma_1(t) = (\cos(t), -\sin(t))$

$\gamma_1'(t) = (-\sin(t), -\cos(t))$

$\|\gamma_1'(t)\| = 1$

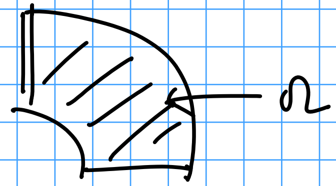
$\hat{\nu}(\gamma(t)) = -\gamma_1(t) = (-\cos(t), \sin(t))$

$$\int_0^{2\pi} 2\sin(t)\cos(t) = 0 \quad !!$$

$$\vec{f}(\gamma(t)) = (-\sin(t), \cos(t))$$

(ANCHE SULL'ALTRO PEZZO VIENE ZERO!)

CAMBIAMO Ω !!



NUOVO $\Omega = \{1 \le x^2 + y^2 \le 4, \; x \ge 0, \; y \ge 0\}$

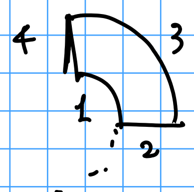
$\vec{f} =$ (come prima) $\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{f} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

$$\iint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy = -4\int_0^{\pi/2} d\theta \cos\theta\sin\theta \int_1^2 \frac{1}{\rho}\,d\rho \quad \text{(come prima)}$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)\,d\theta \left[\ln\rho\right]_1^2 = \left[\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/2} \ln(2) =$$

$$\boxed{-2\ln(2)}$$

FACCIAMO $\int_{\partial\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{\nu})\, ds = 4$ PEZZI



TORNIAMO A ESPRIMERE SI IN MODO "NATURALE"

PEZZO 1

$\gamma_1(t) = \cos(t), \sin(t) \qquad \|\gamma_1'\| = 1$

$\nu(t) = -\gamma_1(t) = (-\cos(t), -\sin(t))$

$f(\gamma_1(t)) = (\sin(t), \cos(t)) \qquad (x^2+y^2=1)$

$$\int_{(1)} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, ds = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))(-\cos(t)) + (\cos(t))(-\sin(t)) = -\int_0^{\pi/2} \sin(2t) =$$

$$\left[\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = -1$$

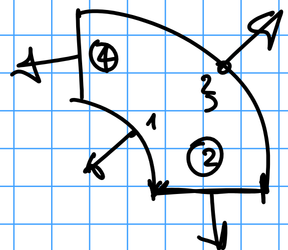
PEZZO 3

$\gamma_2(t) = 2\cos(t), 2\sin(t) \qquad |\gamma_2'| = 2$

$\nu(t) = (\cos(t), \sin(t))$

$f(\gamma_2(t)) = \left(\frac{2\sin(t)}{2}, \frac{2\cos(t)}{2}\right)$

$$(3) = \int_0^{\pi/2} 2\sin(t)\cos(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \sin(2t) = 1$$



PEZZO 2

$$\int_{(2)} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, ds = \int_1^2 -\frac{x}{x^2+0^2}\, dx = -\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = -\ln 2$$