Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 53, 14 aprile 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Def. Due curve CHIUSE γ_0 e γ_1, da $[a,b] \to \Omega$ si dicono "OMOTOPE" in Ω se esiste una "deformazione" $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$, continua, tale che

$$\gamma_0(t) = H(t,0) \; ; \; \gamma_1(t) = H(t,1) \; ; \qquad H(a,s) = H(b,s)$$

(per ogni s c'è una curva chiusa $\gamma_s : [a,b] \to \Omega$, che al variare di s, passa con continuità da γ_0 a γ_1)

TEOREMA Se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è irrotazionale, e se γ_0 e γ_1 sono curve chiuse omotope in Ω, ALLORA

$$\int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot ds$$

(NE SEGUE CHE: se Ω è SEMPLICEMENTE CONNESSO, ogni campo irrotazionale è conservativo)

DIM. Considero un'ipotesi in più e cioè che H sia derivabile sia in t che in s (e suppongo di poter derivare sotto il segno di integrale)

Per dimostrare la tesi, considero la deformazione $H(t,s)$, per ogni s considero $\gamma_s(t) = H(t,s)$ e prendo

$$I(s) = \int_{\gamma_s} \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad s \in [0,1]$$

DIMOSTRO CHE $I'(s) = 0$ (se ci riesco $\Rightarrow I(0) = I(1)$)

da $\bar{g}$ e ter.)

$$I(s) = \int_a^b \vec{f}(\underbrace{H(t,s)}_{\gamma_s(t)}) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} H(t,s)}_{\gamma_s'(t)}\, dt =$$

$$\int_a^b \sum_{i=1}^N f_i(H(t,s)) \frac{\partial}{\partial t} H_i(t,s)\, dt$$

. ALLORA

$$I'(s) \overset{\text{IPOTESI}\ldots}{=} \int_a^b \frac{d}{ds} \left(\sum_{i=1}^N \left(f_i(H(t,s)) \frac{\partial}{\partial t} H_i(t,s) \right) \right) dt =$$

$$\underbrace{}_{(*)}$$

$$\left[\int_a^b \sum_{i=1}^N \left(\underbrace{\frac{d}{ds} f_i(H(t,s))} \cdot \frac{\partial}{\partial t} H_i(t,s) + f_i(H(t,s)) \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H_i(t,s) \right) dt \right.$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}}_{= \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(H(t,s))} \frac{\partial H_j}{\partial s}(t,s) \frac{\partial H_i}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^N f_i(H(t,s)) \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H_i(t,s) \right] dt$$

CAMBIO i con j

$$= \int_a^b \left[\sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \right) \frac{\partial H_j}{\partial s} + \sum_{j=1}^N f_j(H(t,s)) \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} H_j(t,s) \right] dt$$

CON GLI STESSI CONTI, SCAMBIANDO s e t

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\vec{f}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(t,s) \right) dt =$$

USO IL II° TEOREMA DEL CALCOLO

$$\left[\vec{f}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(t,s) \right]_a^b =$$

$$\vec{f}(H(b,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(b,s) - \vec{f}(H(a,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} (H(a,s)) \quad (\star)$$

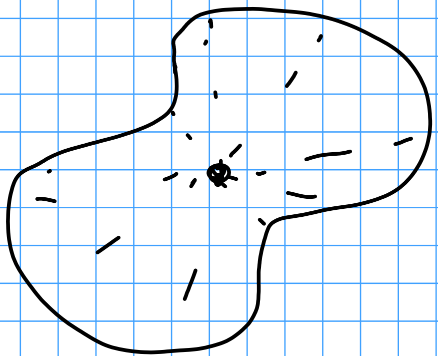
Dato che per ipotesi ogni γ_s è chiuso

$$\underbrace{H(b,s) = H(a,s)}_{} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial s}(b,s) = \frac{\partial H}{\partial s}(a,s)$$

e DUNQUE IN $(\star)$ VIENE <u>ZERO</u>

OSSERVAZIONI

(1) Supponiamo che Ω contenga un punto che "vede tutti gli altri punti": $\exists\, x_0 \in \Omega$ tale che, per



$\forall\, x \in \Omega$ il segmento tra x e x_0 è tutto in Ω

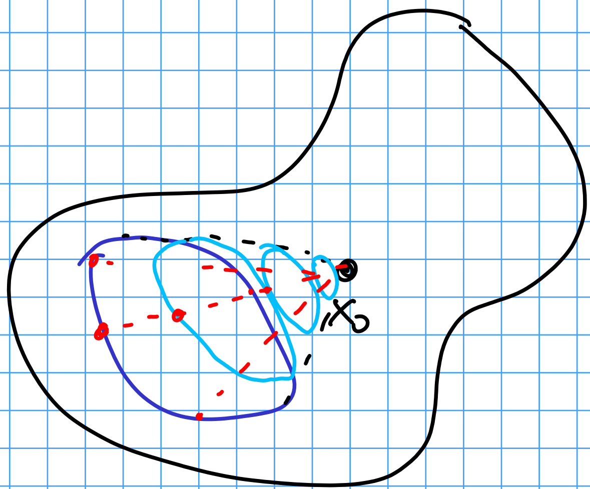
(Ω è STELLATO) $\Rightarrow$

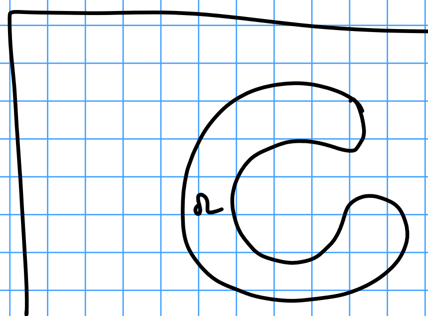
Ω è semplicemente connesso

Infatti, data una curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$, posso definire

$$H(t, s) = x_0 + s(\gamma(t) - x_0)$$

(OGNI CURVA γ è "CONTRATTA" sul "punto base" x_0





(è S.C. MA NON È STELLATO

(2) Se $N \geq 3$ $\mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$ è semplicemente connesso

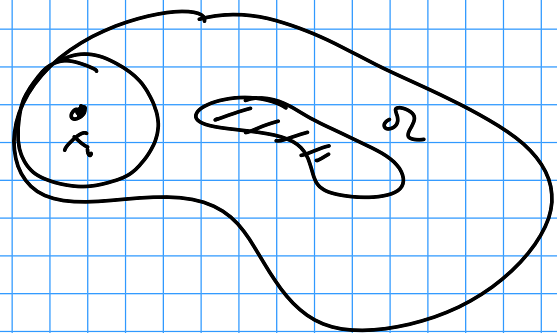
(anche se non è stellato – però si vede ...)

mentre $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ NON È semp. conn.

(3) Dunque ogni campo irrotazionale $\vec{f}$ è "LOCALMENTE CONSERVATIVO", cioè dato $x_0 \in \Omega$ posso prendere $R > 0$ tale che $B(x_0, R) \subset \Omega$

Essendo $B(x_0, R)$ stellato $\Rightarrow$

$\vec{f}$ è conservativo in $B(x_0, R)$

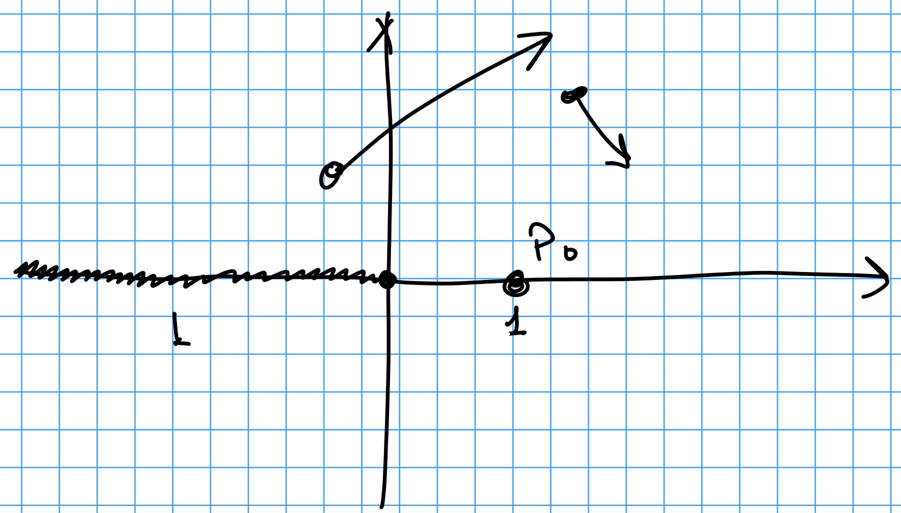


TORNIAMO SULL'ESEMPIO "CRITICO" su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$

$$\vec{f}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} , \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

Prendiamo $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,0)$ con $x < 0 \}$

(tolgo a $\mathbb{R}^2$ la semiretta con $x < 0$)



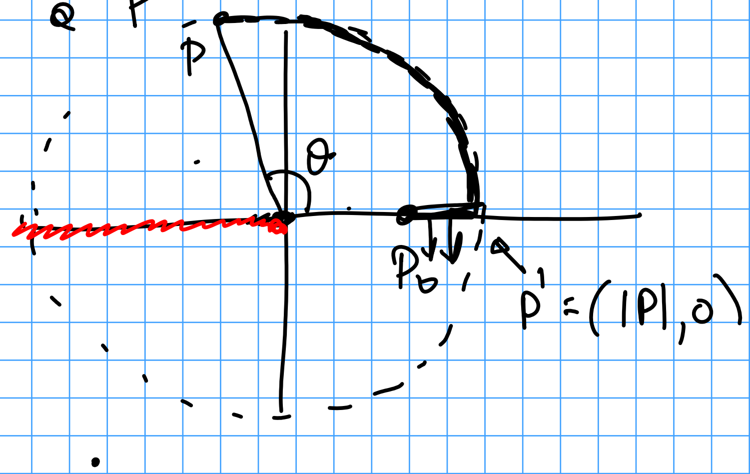
Si vede che Ω_1 è stellato per esempio rispetto a $(1,0)$

PER IL TEOREMA A, deve esistere un potenziale F_1 per $\vec{f}$ su Ω_1. Per trovare $F_1(P)$ per $P \in \Omega_1$ basta fare l'integrale di linea di $\vec{f}$ su una qualunque curva <u>in Ω_1</u> che congiunge P a un punto P_0 prefissato — PRENDO $P_0 = (1,0)$

DUNQUE PRESO $P = (x,y)$ (tale che o $y \neq 0$ o $x > 0$)

Posso scegliere, come mi fa più comodo, una curva in Ω_1

da P_0 e P



$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ dove

γ_0 va da $P_0 = (1, 0)$ a

$P' = (|P|, 0)$

γ_1 è un'arco di circonferenza da P' e P

VEDIAMO COSA VIENE:

γ_0 è un segmento che posso parametrizzare ponendo

$\gamma_0(s) = (s, 0)$ con s "da" 1 e $|P|$

$\gamma_0'(s) = 1$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_1^{|P|} f(s, 0) \cdot (1, 0)\, ds = 0$$

$$\left. \frac{y}{x^2+y^2} \right|_{y=0,\ x=s}$$

VICEVERSA γ_1 lo descrivo ponendo

$$\boxed{\gamma_1(s) = (|P| \cos(s), |P| \sin(s))}$$

dove s varia tra 0 e θ, θ essendo l'argomento di P tra $-\pi$ e π (caso $\theta > 0$ – se $\theta < 0$ la curva sarà $(|P|\cos(s), -|P|\sin(s))$)

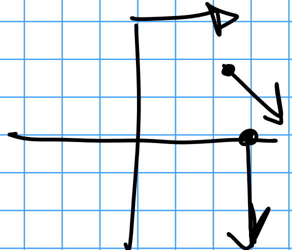
$$\gamma_1'(s) = \left(-|P|\sin(s),\ |P|\cos(s)\right) \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^\theta \left(\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)(-|P|\sin(s)) + \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)|P|\cos(s) \right) ds$$

dove $x = |P|\cos(s)$

$y = |P|\sin(s)$

$$= \int_0^\theta \left(\frac{-|P|^2 \sin^2(s)}{|P|^2} - \frac{|P^2|\cos^2(s)}{|P|^2} \right) ds = \int_0^\theta (-1)\, ds = -\theta$$



$\frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad \frac{-x}{x^2+y^2}$

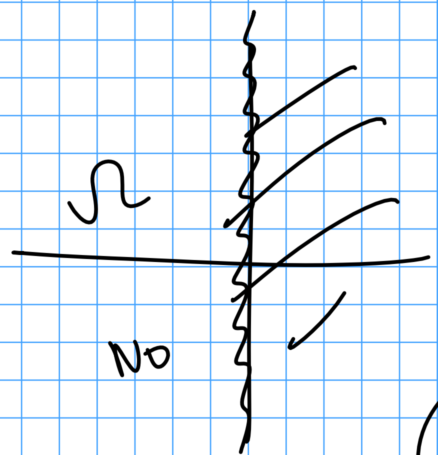
DUNQUE IL POTENZIALE È L'ARGOMENTO : $F_1(P) = \theta$

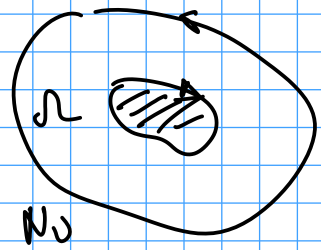
cioè $F_1(P) = \theta \iff -\pi < \theta < \pi$ e $P = \big(|P|\cos(\theta), |P|\sin(\theta)\big)$

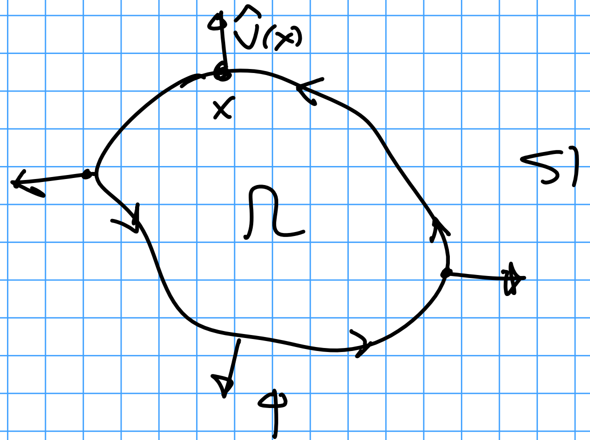
NATURALMENTE È ARBITRARIO AVERE RIMOSSO LA SEMIRETTA DELLE $x<0$ - POSSO ANALOGAMENTE RIMUOVERE UNA A QUALUNQUE SEMIRETTA CHE PARTE DALL'ORIGINE

$N = 2$ (SIAMO NEL PIANO)

SUPPONIAMO $\forall\ \Omega \subset \mathbb{R}^2$, LIMITATO tale che $\partial\Omega$ è descritto da una <u>SOLA</u> curva γ chiusa.







SUPPONIAMO ANCHE CHE per ogni punto $x \in \partial\Omega$ ci sia la direzione normale $\hat{\nu}(x)$ ESTERNA con $|\nu(x)| = 1$

(cioè $\underline{\nu(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0}$ $\forall t \in [0, L]$)

Prendiamo $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$

ALLORA

(1) Ω è semplicemente connesso (per il solo fatto che $\partial\Omega$ è descritto da una sola curva) NO DIM.

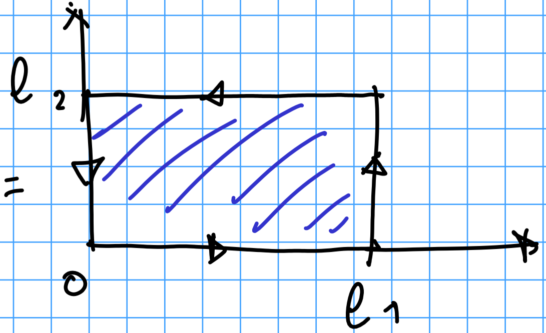
DEFINIAMO $\operatorname{div} \vec{f}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2)$

ALLORA

$$\underbrace{\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{f} \, dx_1 dx_2}_{*} = \underbrace{\int_\gamma \left(\vec{f} \cdot \vec{\nu} \right) ds}_{\text{FLUSSO DI } f \text{ su } \partial\Omega}$$

$$\int_\gamma (\vec{f} \cdot \vec{\nu})\, ds = \underbrace{\int_a^b \left(\vec{f}(\gamma(t)) \cdot \vec{\nu}(\gamma(t))\right) |\gamma'(t)|\, dt}$$

VEDIAMO QUESTA FORMULA NEL CASO DI UN RETTANGOLO

$Q =$ 

Prendiamo $f(x,y) =$
$\left(f_1(x,y) , f_2(x,y) \right)$
definita su Q

CALCOLIAMO l'integrale su Q della div f_1, cioe'

$$\iint_Q \left(\frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y) \right) dx\,dy =$$

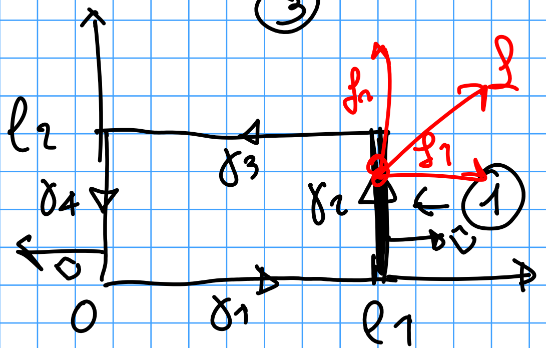
$$\iint_Q \frac{\partial}{x} f_1(x,y)\, dx\,dy + \iint_Q \frac{\partial}{y} f_2(x,y)\, dx\, y =$$

$$\int_0^{l_2} \left(\int_0^{l_1} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y)\, dx \right) dy + \int_0^{l_1} \left(\int_0^{l_2} \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y)\, dy \right) dx =$$

$$\int_0^{\ell_2}\Big[f_1(x,y)\Big]_{x=0}^{x=\ell_1} dy + \int_0^{\ell_1}\Big[f_2(x,y)\Big]_{y=0}^{y=\ell_2} dx =$$

$$\boxed{\int_0^{\ell_2} \underbrace{f_1(\ell_1,y)}_{= (1)} dy} - \underline{\int_0^{\ell_2} \underbrace{f_1(0,y)}_{= (2)} dy}$$

$$+\int_0^{\ell_1} \underbrace{f_2(x,\ell_2)}_{= (3)} dx - \int_0^{\ell_1} \underbrace{f_2(x,0)}_{= (4)} dx$$



$\hat{\nu}$ è la NORMALE USCENTE

$$(1) = \int_{\gamma_2} f_1 \, ds = \int_{\gamma_2} \left(\vec{f} \cdot \vec{\hat{\nu}}\right) ds$$

$$(2) = \int_{\gamma_4} (-f_1) \, ds = \int_{\gamma_4} \left(\vec{f} \cdot \vec{\hat{\nu}}\right) ds$$

$$(3) = \int_{\gamma_3} \left(\vec{f} \cdot \vec{\hat{\nu}}\right) ds \qquad (4) = \int_{\gamma_1} \left(\vec{f} \cdot \vec{\hat{\nu}}\right) ds$$

DUNQUE, nel caso del rettangolo $Q \subset \mathbb{R}^2$ (in cui è facile descrivere ∂Q) vale ie

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{f})\, dx\, dy = \text{flusso di } \vec{f} \text{ su } \partial\Omega$$

$$= \int_{\gamma} \underbrace{(\vec{f} \cdot \vec{\nu})}_{\text{SCALARE}}\, ds$$

← questo è un integrale di I° specie - non dipende dall'orientamento di γ.

$\hat{\nu}$ = normale unitario uscente

il fatto di poter scegliere un verso "canonico" della normale dipende dal fatto che $\partial\Omega$ è il bordo di Ω. Vedremo una situazione analoga nel caso $N=3$

ULTERIORI PRECISAZIONI DOMANI !!