Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 52, 9 aprile 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Definizione. $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^n$, di classe C^1, è IRROTAZIONALE, se

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad i,j = 1 \dots n, \quad i \neq j$$

Teorema. Se $\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è irrotazionale.

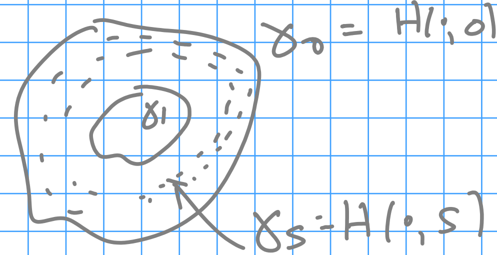
NON VALE IL VICEVERSA, come mostra l'esempio $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$

Definizione (a) Date due curve chiuse γ_0 e $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$, dico che sono OMOTOPE in Ω se esiste una funzione $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$

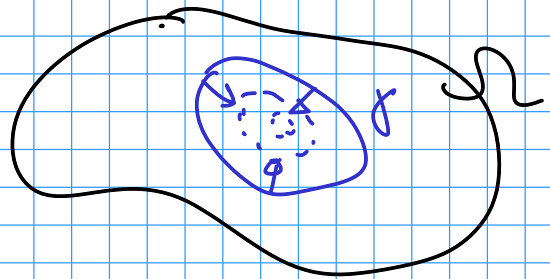
$H(t,s)$ continua nelle due variabili (t,s), tale che

$H(t,0) = \gamma_0(t)$; $H(t,1) = \gamma_1(t)$; $H(a,s) = H(b,s)$

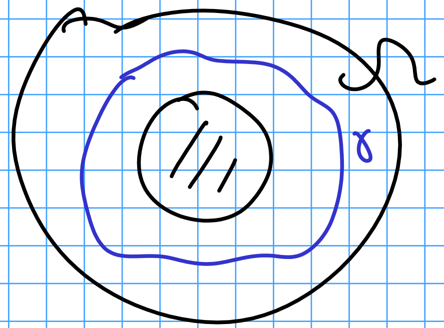
L'idea è che $H(t,s)$ è una "deformazione" che muovendo il parametro s da 0 a 1 fa passare con gradualità da γ_0 $(s=0)$ a γ_1 $(s=1)$



(b) Dico che Ω è SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni curva chiusa in Ω è omotopa (in Ω) a una curva costante



posso "strizzare" γ a un punto (senza uscire da Ω) $\Rightarrow$ Ω semplicemente connesso



NON POSSO DEFORMARE γ a un punto $\Rightarrow$ Ω NON S.C.

TEOREMA (A) Se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è un campo irrotazionale in un aperto Ω, allora date due curve γ_0 e γ_1 OMOTOPE si ha

$$\int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot ds$$

Vedremo un'idea della dim. di questo (PROFONDO) teorema la prossima volta

TEOREMA (B) Se Ω è semplicemente connesso e $\vec{f}$ è un campo irrotazionale in Ω, allora $\vec{f}$ è conservativo.

DIM. (a partire dal teorema A)

- Sia γ un'arbitrario curva chiuso in Ω
- Dato che Ω è semplicemente connesso $\Rightarrow \exists\, x_0$ tale che γ è omotopa alla curva costante $\gamma_0(t) = x_0 \quad \forall t \in [a,b]$
- Per il teorema A si ha

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(x_0) \cdot \gamma_0'(t)\, dt = 0$$

perché $\gamma_0'(t) = 0$ essendo γ_0 costante in t

- Dato che $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall \gamma$ chiusa $\Rightarrow \vec{f}$ è conservativo