Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 51, 8 aprile 2014

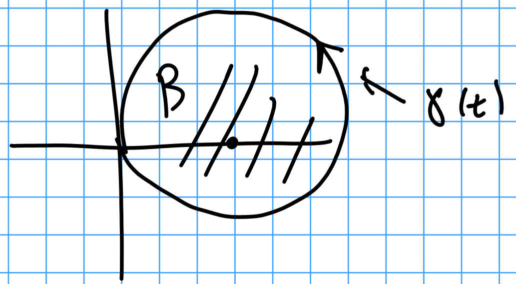
(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

ESEMPI DI INTEGRALI CURVILINEI

$$\vec{f}(x,y) = (x^2+y,\ xy)$$

VOGLIO $\displaystyle\int_{\partial B} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ ← sottintendo che dico curva γ che descrive ∂B (coerentemente con B)

dove $B = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$



$$\gamma(t) = (1+\cos(t),\ \sin(t))$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t),\ -\cos(t))$$

$$\int_{\partial B} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt =$$

$$\left(\begin{array}{l} x = 1+\cos(t) \\ y = \sin(t) \end{array}\right) = \int_0^{2\pi} \Big\{ \Big[\overbrace{(1+\cos(t))^2}^{1+2\cos t+\cos^2(t)} + \sin(t) \Big] (-\sin(t)) +$$

$$\Big[-\sin(t)\cos(t) \Big] (\cos(t)) \Big\}\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi}\left\{-\left(1+2\cos(t)+\cos^2(t)+\sin(t)\right)\sin(t)-\cos^2(t)\sin t\right\}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\underbrace{-\sin(t)}_{\text{INT}=0}-\underbrace{2\cos(t)\sin(t)}_{\text{INT}=0}-2\sin(t)\cos^2(t)-\sin^2(t)\right\}dt=$$

$$-2\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos^2(t)\,dt-\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt=$$

$$z=\cos(t)$$

$$dz=-\sin(t)\,dt$$

$$2\int_1^1 z^2\,dz=0$$

$$-\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2t)-1}{2}\,dt$$

$$=\pi$$

TEOREMA $\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^N$ continuo. Sono equivalenti

(Ω è connesso)

(a) $\vec{f}$ è conservativo

(b) Data due curve qualunque $\gamma_1,\gamma_2:[a,b]\to\Omega$, regolari a tratti, tali che $\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$ E $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\int_{\gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{s}$$

(il lavoro dipende solo dagli estremi della curva)

(c) Data una qualunque curva chiusa $\gamma : [a,b] \to \Omega$, regolare a tratti, si ha

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

SE INOLTRE VALE UNA DI QUESTE, SI HA (d) CHE OGNI POTENZIALE DI $\vec{f}$ è dato da:

$(x = (x_1 \ldots x_n))$

$$(*) \quad F(x) = K + \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad \left(F_{x_0}(x) \right) \qquad K \in \mathbb{R}$$

dove γ è una (arbitraria) curva con primo estremo x_0 e secondo estremo x. x_0 essendo un (qualunque) punto, prefissato, di Ω. Per ogni x_0 ho un diverso F

LA $(*)$ ha senso in virtù della (b): $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ DIPENDE solo da x_0 (fissato) e x

DIM. I° se vale (a), cioè se $\vec{f}$ è conservativo e se F è un potenziale per $\vec{f}$, allora, per qualunque curva γ:

$$(**) \quad \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

IN EFFETTI, applicando le definizioni:

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t)\, dt =$$

$$\int_a^b \overrightarrow{\nabla F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt =$$

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

(TEOR. FOND. CALC. INT.)

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

DUNQUE, se $\vec{f}$ è conservativo, vale (**) $\Rightarrow$ vale (b).

Inoltre, fissato x_0, da ** deduco che

$$F(x) = F(x_0) + \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

dove γ è una qualunque curva che congiunge x_0 ad x

QUESTO DIMOSTRA LA (d)

II^b (VICEVERSA DI I) Supponiamo che valga (b)

(l'integrale non dipende da γ, solo da $\gamma(b)$ e $\gamma(a)$)

ALLORA POSSO fissare x_0 e definire $F(x)$ come in (*) con $K=0$

$$F(x) = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad \gamma \text{ che congiunge } x_0 \text{ e } x$$

DIMOSTRIAMO CHE F è un potenziale, cioè $\vec{\nabla} F = \vec{f}$

Fisso $i = 1 \dots N$ e calcolo $\frac{\partial}{\partial x_i} F(x) =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + h\hat{e}_i) - F(x)}{h} = \qquad \hat{e}_i = (0 \dots \underset{\text{posto } i\text{-esimo}}{1} \dots 0)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{x_0, x+h\hat{e}_i}} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_{x_0,x}} \vec{f} \cdot d\vec{s} \right)$$

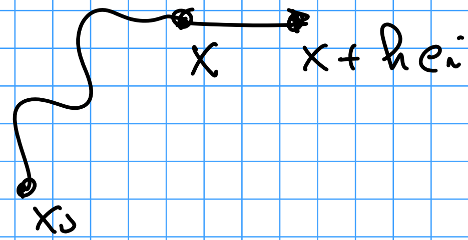
dove $\gamma_{x_0, x+h\hat{e}_i}$ e $\gamma_{x_0,x}$ sono due (arbitrarie) curve che congiungono x_0 a $x+h\hat{e}_i$ / x

Dato l'ipotesi posso scegliere $\gamma_{x_0,x}$ come mi pare

e $\gamma_{x_0, x+h\hat{e}_i} = \gamma_{x_0,x} + \Delta_{x, x+h\hat{e}_i}$ ← segmento da x a $x+h\hat{e}_i$

$s(t) = x + t\,\hat{e}_i \qquad 0 \le t \le h$

$s'(t) = \hat{e}_i$



ALLORA $\quad F(x+h\hat{e}_i) - F(x) =$

$$\int_{\gamma_{x_0,x}+s} \vec{f}\cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_{x_0,x}} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{s} \vec{f}\cdot d\vec{s} =$$

$$\int_0^h \vec{f}(x_1,\dots,x_i+t,\dots x_N)\cdot \hat{e}_i \, dt =$$

$$\int_0^h f_i(x_1\dots,x_i+t,\dots x_n)\,dt$$

DUNQUE

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(F(x+h\hat{e}_i) - F(x)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h f_i(x_1\dots x_i+t,\dots x_N)\,dt$$

(Teor. Fond. calcolo int. II°) $\quad f_i(x_1\dots x_i+t\dots x_N)\big|_{t=0} =$

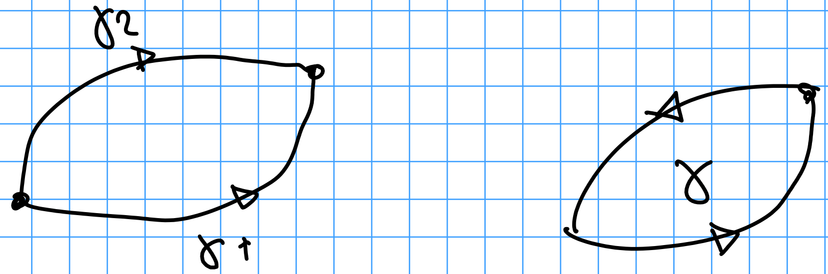
$f_i(x)$ $\qquad$ IN DEFINITIVA $\quad \boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}F(x) = f_i(x)}$

cioè F è un potenziale per $\vec{f}$

(b) $\Leftrightarrow$ (c)

Se vale (b) $\Rightarrow$ vale (c) dato che, se γ è chiuso $\gamma(b) = \gamma(a) \Rightarrow F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$

Se vale (c) dimostriamo (b). Prendiamo γ_1 e γ_2 aventi gli stessi estremi



Posso definire $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 \Rightarrow \gamma$ è chiusa

Se vale (c) $\Rightarrow$ $$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = 0$$

$$\| $$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f}\, d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f}\, ds \Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f}\, d\vec{s}$$

ESEMPI

$$\vec{f}(x,y) = \left((xy+1)e^{xy} \, , \; x^2 e^{xy} \right) \qquad \left(\Omega = \mathbb{R}^2 \right)$$

VEDIAMO SE $\vec{f}$ è conservativo. Vediamo se esiste un potenziale, cioè se $\exists\, F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (xy+1)e^{xy} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 e^{xy}$$

INTEGRIAMO (LA PRIMA IN X, la seconda in y)

$$\int (xy+1)\, e^{xy}\, dx = \int xy\, e^{xy}\, dx + \int e^{xy}\, dx =$$

$$y\left[x \frac{e^{xy}}{y} \right] - \frac{y}{y}\int e^{xy} + \int e^{xy} = x e^{xy} + c(y)$$

se F c'è è di questa forma

Vediamo se è verificata anche la seconda condizione:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x e^{xy} + c(y) \right) = x^2 e^{xy}$$

$$x^2 e^{xy} + c'(y)$$

VERA SE $c(y)$ = costante

DUNQUE $\vec{f}$ è conservativo e

$$F(x,y) = x e^{xy} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

ALTRO ESEMPIO

$$f(x,y,z) = \left(\frac{2}{y}, \frac{2x+z}{y^2}, \frac{1}{y} \right) \quad \text{su } \Omega = \{ y > 0 \}$$

PROVIAMO A CERCARE UN POTENZIALE $F(x,y,z)$

(I) $\frac{\partial}{\partial x} F = \frac{2}{y}$, (II) $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2x+z}{y^2}$, (III) $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{y}$

(I) $\Rightarrow$ $\boxed{F(x,y,z) = \frac{2x}{y} + c_1(y,z)}$

(III) $\Rightarrow$ $\boxed{F(x,y,z) = \frac{z}{y} + c_2(x,y)}$

AGGIUNGIAMO LA II alla I $\Rightarrow$

$$-\frac{2x}{y^2} + \frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = -\frac{2x}{y^2} - \frac{z}{y^2} \iff \frac{\partial c_1}{\partial y} = -\frac{z}{y^2}$$

$c_1(y,z) = \frac{z}{y} + c(z)$ rimettendo in I

$\Rightarrow \quad F(x,y,z) = \frac{2x}{y} + \frac{z}{y} + c(z)$

IMPONGO (III) all'ultima relazione

$$C_2(x,y) = \frac{2x}{y} + c(z) \quad \Rightarrow \begin{cases} c(z) = \text{costante} \\ C_2(x,y) = \frac{2x}{y} + \text{cost.} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad F(x,y,z) = \frac{2x}{y} + \frac{z}{y} + c$ è un potenziale

(verifico che quello ho trovato ha le proprietà richieste)

(anzi descrive tutti i potenziali, se $c \in \mathbb{R}$)

<u>NOTA</u> AVREI POTUTO PRENDERE $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{y=0\} =$

$\Omega^+ \cup \Omega^-$ dove $\Omega^+ = \{(x,y,z) : y > 0\}$ ← DUE PEZZI

$\Omega^- = \{(x,y,z) : y < 0\}$ ← "SCONNESSI"

se faccio così la costante può essere presa diversa

su Ω^+ e su Ω^-

PROPRIETÀ DEI CAMPI CONSERVATIVI

Se $\vec{f}$ è di classe C^1 (HA DERIVATE PRIME CONT.)
e se $\nabla F = \vec{f}$ $\Rightarrow$ F è di classe C^2 (HA DERIVATE SECONDE CONTINUE) $\Rightarrow$ (Schwartz) le derivate miste non dipendono dall'ordine: se $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} f_j = \frac{\partial}{x_j} f_i}$$

DICO CHE $\vec{f}$ è "IRROTAZIONALE" se HA LA PROPRIETÀ SOPRA

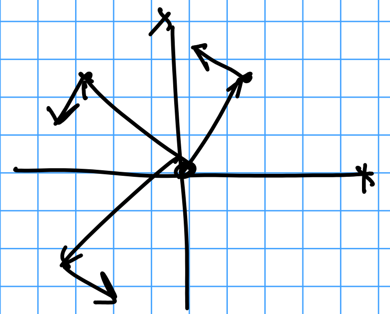
<u>FATTO</u> Se $\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è irrotazionale

CONDIZIONE NECESSARIA. Se f NON È IRROTAZIONALE $\Rightarrow$ NON PUÒ ESSERE CONSERVATIVO.

TALE È SUFFICIENTE ?? IN GENERALE <u>NO</u>

ESEMPIO di un campo irrotazionale non conservativo.

$$\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$



VEDIAMO CHE f è IRROTAZIONALE:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-1(x^2+y^2)-(-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1(x^2+y^2)-x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$(=)$

VEDIAMO CHE $\vec{f}$ NON È CONSERVATIVO.

Prendo $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $\quad \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$

$0 \le t \le 2\pi \Rightarrow \gamma$ è chiusa

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[(-\sin(t)) \cdot (-\sin(t)) + \cos(t)\cdot\cos(t)\right] dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = \underline{\underline{2\pi \neq 0}}$$

COSA SUCCEDE SE CERCO UNA PRIMITIVA DI $\vec{f}$??

$$\frac{\partial}{\partial x} F = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \left(\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}\right)$$

Dalla prima

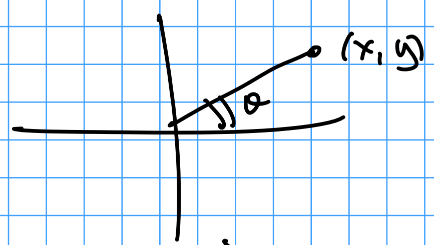
$$F(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx = -\frac{1}{y}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\, dx =$$

$$- \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c(y)$$

Analogamente $F(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x)$

Si vede facilmente che le due soluzioni vanno d'accordo:

Potrei prendere $F(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{Arg}(x,y) = \theta$



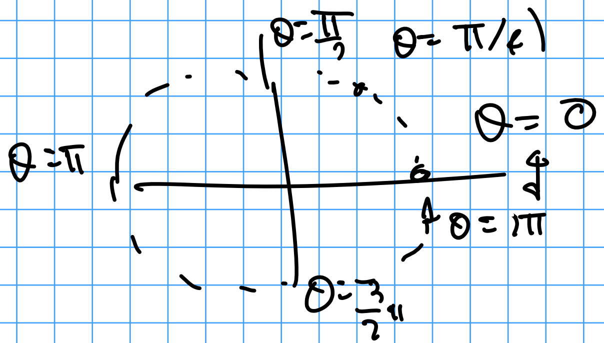
PURTROPPO θ NON È CONTINUA IN (x,y) SU TUTTO

$\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ NEL SENSO CHE NON ESISTE UNA

FUNZIONE $\theta(x,y) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}$, CONTINUA

tale che $\theta(x,y)$ = UN ARGOMENTO DI (x,y)

DOPO UN GIRO C'È UN SALTO DI 2π



IL PROBLEMA È NEL PRESENZA DI $(0,0)$