Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 50, 7 aprile 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

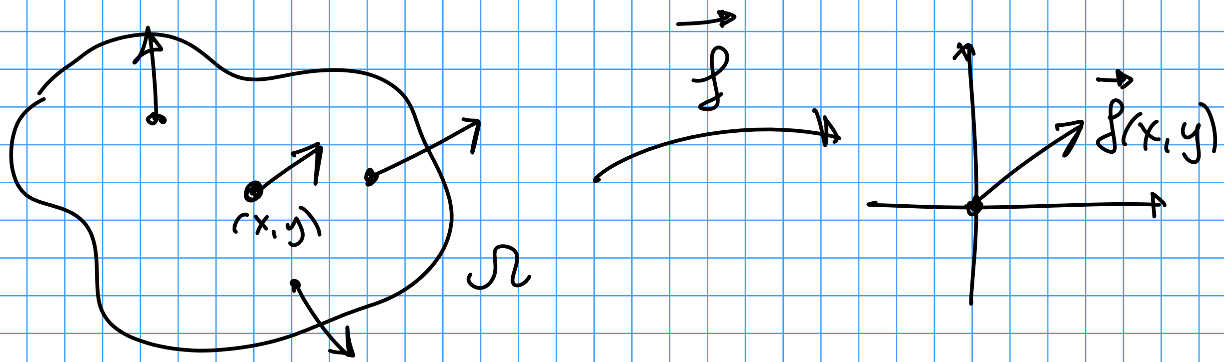
CAMPI DI VETTORI / CAMPI CONSERVATIVI

(forme differenziali)

Dato un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, chiamo campo di vettori su Ω una applicazione

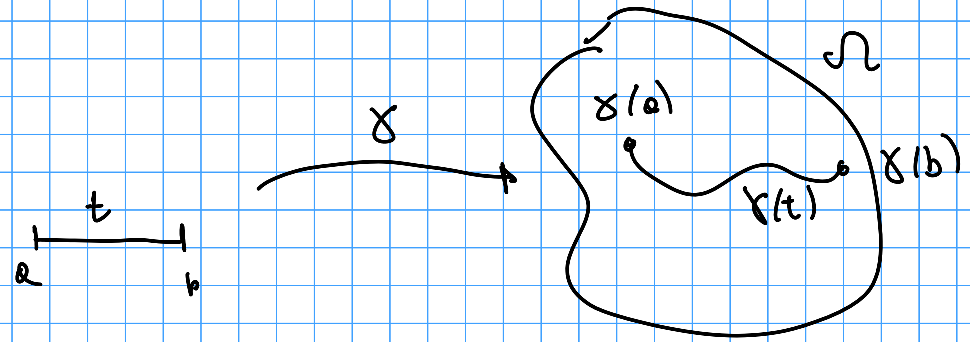
$$\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$$

TIPICAMENTE $\vec{f}$ sarà continuo (e differenziabile).



$$\vec{f} = (f_1, \dots f_n) \qquad f_i \text{ COMPONENTI di } \vec{f}$$

<u>DEFINIZIONE</u> INTEGRALE CURVILINEO (di II° tipo) di un campo $\vec{f}$ su una curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$



con γ curva regolare ($\gamma'(t) \neq 0$, quindi $\gamma(t)$ ha tangente in ogni punto)

SI PONE:

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \underset{\text{DEF.}}{=} \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

PRODOTTO SCALARE

RICORDO che abbiamo già definito l'integrale curvilineo di I° tipo, per una funzione scalare $g : \Omega \to \mathbb{R}$

Ponendo

$$\int_\gamma g\, ds = \int_a^b g(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt$$

L'INTEGRALE DI I° tipo permette di definire la lunghezza di γ ($\ell(\gamma) = \int_\gamma 1\, ds$) o la massa di un filo conoscendo la densità γ ...

L'INTEGRALE DI II° tipo è legato all'idea di "LAVORO" del campo $\vec{f}$ sul percorso γ

ESAMINIAMO LE PROPRIETÀ DI QUESTO INTEGRALE

1° INDIPENDENZA DALLA PARAMETRIZZAZIONE

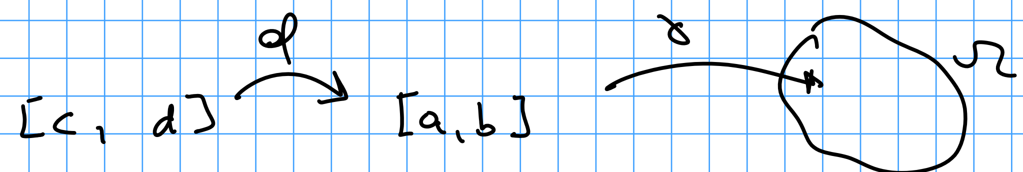
(A MENO DI UN SEGNO)

Dati $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ e data

$\varphi : [c, d] \to [a, b]$ BIGETTIVA, C^1 (derivabile con φ' continua)

($\Rightarrow$ φ è strettamente monotona e manda estremi in estremi)

PONGO $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$, dunque $\gamma_1 : [c, d] \to \Omega$



(φ è un "CAMBIO DI PARAMETRO")

ALLORA

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \begin{cases} \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} & \text{se } \varphi(c) = a \ (e\ \varphi(d) = b) \\ -\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} & \text{se } \varphi(c) = b \ (e\ \varphi(d) = a) \end{cases}$$

(RICORDO CHE

$$\int_{\gamma_1} g\, ds = \int_\gamma g\, ds \quad (\text{non cambia se cambio verso}))$$

DIM.

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_c^d \vec{f}(\gamma_1(s)) \cdot \vec{\gamma}_1'(s)\, ds = \ldots$$

MA $\vec{\gamma}_1(s) = \gamma(\varphi(s)) \Rightarrow \vec{\gamma}_1'(s) = \vec{\gamma}'(\varphi(s))\, \varphi'(s)$

$$\Rightarrow \ldots = \int_c^d \left(\vec{f}(\gamma(\varphi(s))) \cdot \vec{\gamma}'(\varphi(s))\right) \varphi'(s)\, ds =$$

CAMBIO DI VARIABILE $t = \varphi(s)$

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \pm \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

$$= \pm \int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s}$$ dove devo mettere

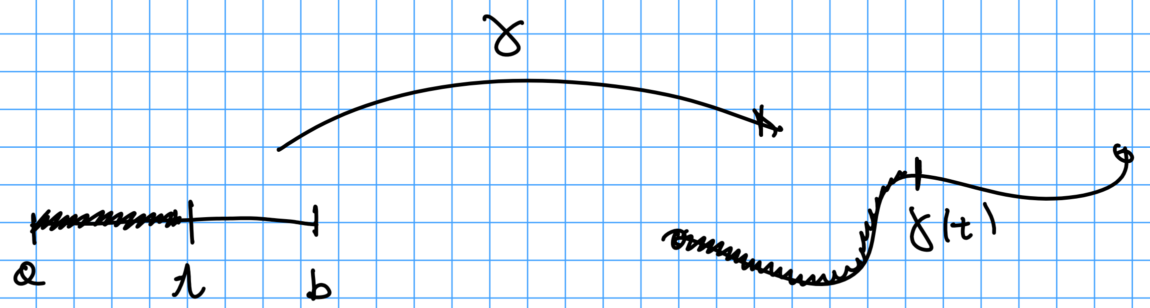
$+$ se $\varphi(c) = a$ / $\varphi(d) = b$, devo mettere

$-$ se $\varphi(c) = b$ / $\varphi(d) = a$

IN VIRTÙ DI QUESTO RISULTATO POTREI PARAMETRIZZARE LE CURVE SU UN "INTERVALLO STANDARD", per es. su $[0,1]$ – OPPURE POTREI USARE SEMPRE LA "LUNGHEZZA D'ARCO", (se γ ha lunghezza finita), cioè

Dato $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, regolare, per $t \in [a,b]$

$\ell(t) =$ lunghezza della restrizione di γ a $[a,t]$



IN QUESTO MODO HO DEFINITO $\ell(t)$ per $t \in [a,b]$; si ha

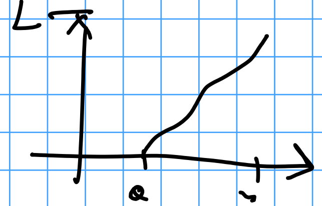
$\ell : [a,b] \to [0, L]$ dove $L = \ell(\gamma)$

$$\ell(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| \, d\tau$$

QUESTA ℓ è una funzione strettamente crescente e

$$\ell'(t) = |\gamma'(t)| \neq 0 \quad (\text{perché } \gamma \text{ è regolare})$$

POSSO INVERTIRE $\ell(t)$ e prendere $\ell^{-1} : [0,L] \to [a,b]$

(

)

$$\Rightarrow (\ell^{-1})'(s) = \frac{1}{\ell'(\ell^{-1}(s))} = \frac{1}{|\gamma'(\ell^{-1}(s))|}$$

Se uso ℓ^{-1} come cambio di parametro ottengo una curva $\gamma_1(s) = \gamma(\ell^{-1}(s))$ ($\gamma_1(s)$ = il punto $\gamma(t)$ tale che la lunghezza del tratto corrispondente ad $[0, t]$ cioè proprio s)

QUANTO FA $\gamma_1'(s)$??

$$\gamma_1'(s) = \left(\gamma(\ell^{-1}(s))\right)' = \gamma'(\ell^{-1}(s))\,(\ell^{-1})'(s) = \frac{\gamma'(\ell^{-1}(s))}{|\gamma'(\ell^{-1}(s))|}$$

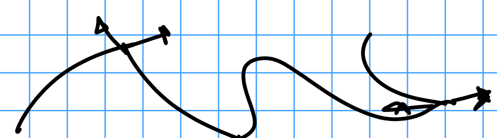
$\leftarrow$ VETTORE DI MODULO 1

DUNQUE SE USO QUESTA PARAMETRIZZAZIONE (PARAMETRIZZAZIONE IN LUNGHEZZA D'ARCO) HO

$\gamma_1 : [0, L]$ con $|\gamma_1'(s)| = 1 \quad \forall s$

$(\Rightarrow L =$ lunghezza di γ_1 = lunghezza di γ)

CONVIENE ESTENDERE LA NOZIONE DI INTEGRALE CURVILINEO AL CASO IN CUI γ è "REGOLARE A TRATTI", cioè



posso spezzare $[a,b]$ in un numero finito di sottoint.

$[c_i, c_{i+1}]$ $i = 0, \dots, k$ $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{k+1} = b$

tali che $\gamma|_{[c_i, c_{i+1})}$ è regolare (C^1 e $\gamma' \neq 0$)

e COMUNQUE γ è continua su $[a,b]$

IN QUESTA SITUAZIONE PONGO

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

dove γ_i = restrizione di γ a $[c_i, c_{i+1}]$

2° PROPRIETÀ LINEARITÀ

$$\int_\gamma (\alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2) \cdot d\vec{s} = \alpha \int_\gamma \vec{f}_1 \cdot d\vec{s} + \beta \int_\gamma f_2 \cdot ds$$

3° PROPRIETÀ ADDITIVITÀ RISPETTO "ALLA BASE"

Date due curve γ_1 e γ_2 "CONTIGUE" CIOÈ

TALI CHE l'estremo destro di γ_1 è uguale all'estremo sinistra di γ_2 $\big($ se $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$

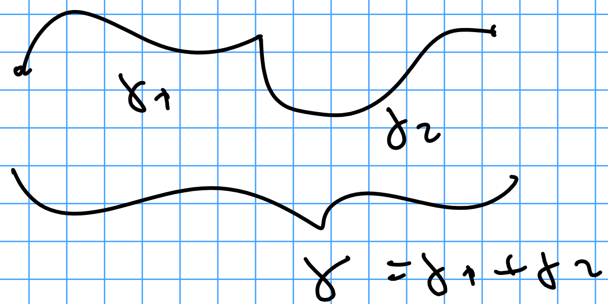
deve essere $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ $\big)$

A MENO DI RIPARAMETRIZZARE posso supporre

$\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$, $\gamma_2 : [b, c] \to \Omega$

e posso definire $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ definito da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } a \le t \le b \\ \gamma_2(t) & \text{se } b \le t \le c \end{cases}$$

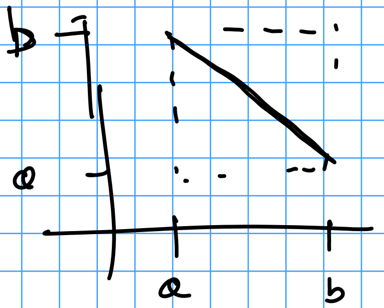


ALLORA $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} \vec{f} \cdot ds = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot ds + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot ds$

QUESTA FORMULA SUGGERISCE:

<u>DEFINIZIONE</u> Data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ definisco

$-\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ PONENDO $-\gamma(t) = \gamma(b + a - t)$



$\varphi(t) = b - (t - a)$

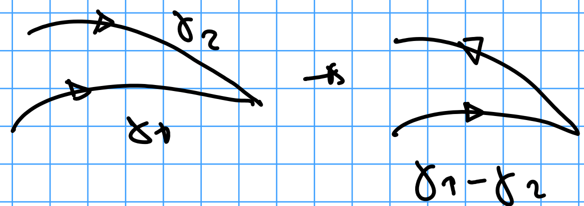
($-\gamma$ ha lo stesso supporto ma "verso opposto")

e dunque

$$\int_{-\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

e $$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

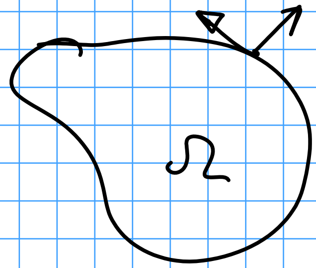
purché $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$



DEFINIZIONE γ si dice chiuso se $\gamma(b)=\gamma(a)$

$N=2$

SUPPONIAMO CHE γ "descriva" $\partial\Omega$



(γ è regolare e $\gamma([a,b]) = \partial\Omega$

- γ deve essere chiuso se Ω è limitato)

DIRÒ CHE γ è orientato coerentemente con Ω se "Ω è a sinistra di γ, quando t cresce"

(SI PUÒ ANCHE DARE UNA DEF. RIGOROSA ...)

PROPRIETÀ 4° Si ha la stima ($\vec{g}$ continua)

$$\left| \int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s} \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |g(t)| \cdot \ell(\gamma)$$

OSS IL VECCHIO INTEGRALE $\int_a^b f(t)\,dt$ si può

può vedere come integrale curvilineo pensando ad $[a,b]$

come supporto della curva $\gamma:[a,b]\to[a,b]$ $\gamma(t)=t$

ESEMPIO

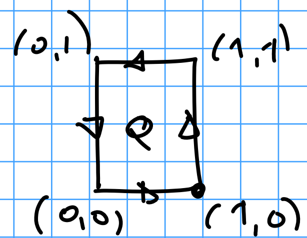
$$f(x,y) = (x-y,\ xy)$$

$$Q = [0,1]\times[0,1]$$

γ = "bordo di Q".

CALCOLIAMO $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$

È chiaro che γ esiste, regolare a tratti



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ dove

$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma_1(t) = (t,0)$

$\gamma_1' = (1,0)$

$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_2(t) = (1, t)$

$\gamma_2' = (0, 1)$

$\gamma_3 = [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_3(t) = (1-t, 1)$

$\gamma_3' = (-1, 0)$

$\gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_4(t) = (0, 1-t)$

$\gamma_4' = (0, -1)$

1° pezzo $\quad f(x,y) = (x-y, \; xy) \qquad \gamma_1(t) = (\overset{x}{t}, \overset{y}{0})$

$x = t \qquad y = 0$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\gamma_1(t)) \cdot \vec{\gamma}_1'(t) \, dt =$$

$$\int_0^1 (t-0, \; t \cdot 0) \cdot (1, 0) \, dt = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$$

2° pezzo

$$\int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\gamma_2(t)) \cdot \vec{\gamma}_2'(t) \, dt = \quad =$$

$$\left(x = 1 \quad y = t \right) \quad \int_0^1 (1-t, \; 1 \cdot t) \cdot (0, 1) \, dt = \int_0^1 t = \frac{1}{2}$$

3° pezzo $\int_{\gamma_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (1-t-1, (1-t)\cdot 1) \cdot (-1, 0) = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$

$x = 1-t, \quad y = 1$

4° pezzo $\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (0-(1-t), 0\cdot(1-t))(0, -1) = 0$

$x = 0 \qquad y = 1-t$

$\Rightarrow \quad \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{3}{2}$

__DEFINIZIONE__ Dato $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ (continua) dico che $\vec{f}$

è CONSERVATIVO se esiste $F : \Omega \to \mathbb{R}$, F C^1,

tale che $\nabla F = \vec{f}$

Se un tale F esiste dico che F è un POTENZIALE

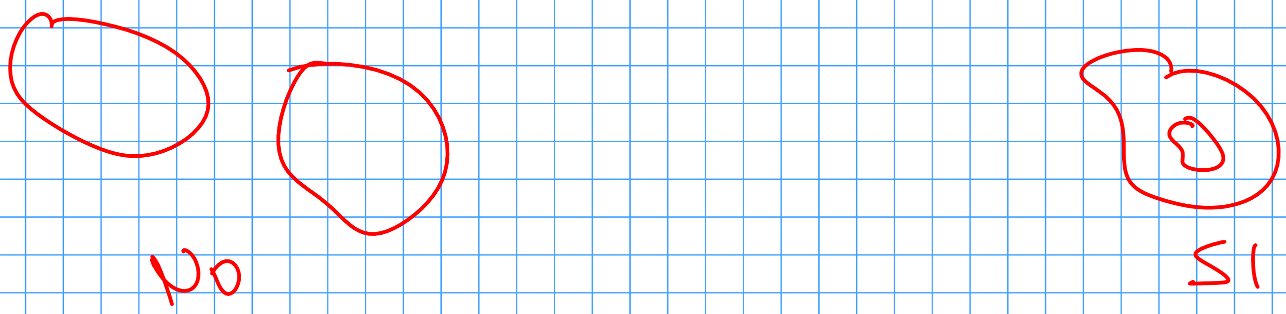
per $\vec{f}$. (è chiaro che se F è un pot. $\Rightarrow$ $F + K$ è un pot.

per ogni $K \in \mathbb{R}$)

OSS. Se Ω è CONNESSO (dati due punti di Ω c'è una curva in Ω che li congiunge) $\Rightarrow$ due potenziali per $\vec{f}$ DEVONO differire per una costante

$\Leftarrow$ ABBIAMO GIÀ VISTO CHE se $\nabla F_1 = \nabla F_2 \Leftrightarrow \nabla(F_1 - F_2) = 0$ e Ω CONNESSO, ALLORA $F_1 - F_2 = \text{costante}$

IN QUANTO SEGUE CONVIENE SUPPORRE SEMPRE Ω CONNESSO



FATTO FONDAMENTALE –

TEOREMA Sono equivalenti:

(a) $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ CONSERVATIVO

(b) $\int_{\gamma_1} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{g} \cdot ds$ se γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi

$(\gamma_1(a) = \gamma_2(a) \,,\ \gamma_1(b) = \gamma_2(b))$

(c) $\oint_{\gamma} \vec{g} \cdot d\vec{s} =$ se γ è una curva chiusa

INOLTRE, se vale una delle proprietà sopra $\Rightarrow$

(d) $\int_{\gamma} \vec{g} \cdot d\vec{s} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

dove F è un qualunque potenziale

to be continued . . .