Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 48, 1 aprile 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Data f T-periodica "la posso sviluppare"

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \quad \text{e per} \quad n \geq 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t) \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)$$

OPPURE

$$f(t) \text{ "="} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$ dove:

(c) $$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}} \qquad (c_n \in \mathbb{C})$$

VISTO (1) Se f è reale $c_{-n} = \overline{c_n}$ (si vede anche - facilmente - dalla formula (c)

(perché $\overline{e^{in\omega t}} = e^{-in\omega t}$)

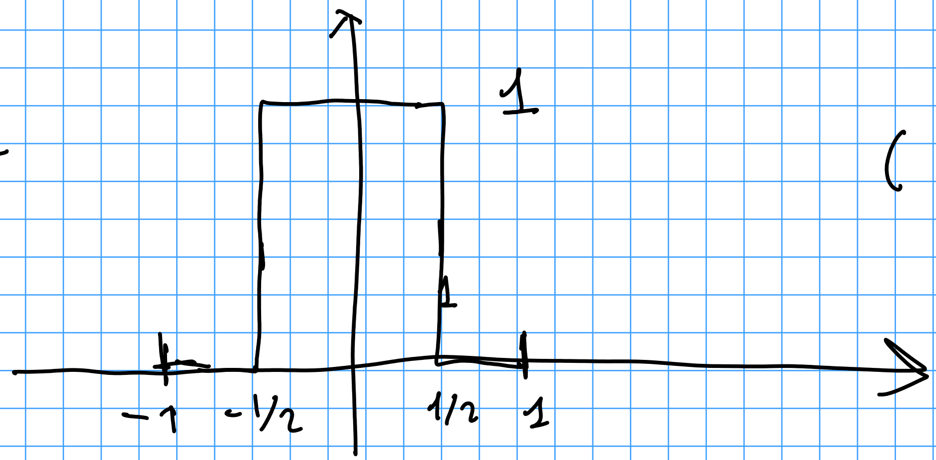
(2) $a_0 = c_0$ e x $n \geq 1$

$a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n) \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$

(3) Interpretazione: $2|c_n|$ = ampiezza "dell'armonica" di frequenza $\frac{n\omega}{2\pi}$

$\mathrm{Arg}(c_n)$ = fase di questa armonica

ESEMPI



(periodica di periodo 2)

$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$ facciamo lo "sviluppo in σ" dunque rispetto alle funzioni $e^{i\pi n t}$ $n \in \mathbb{Z}$.

Devo calcolare

$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t) = 1/2$

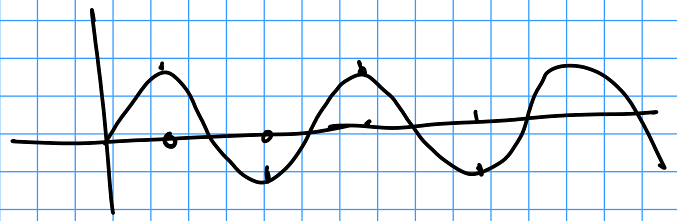
$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\, e^{-i\pi n t}\, dt = \quad (\text{se } n \neq 0)$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\pi n t}\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-i\pi n t}}{-i\pi n}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{i\pi n}{2}} - e^{\frac{i\pi n}{2}}}{-i\frac{\pi n}{2}}$$

$\left(\text{RICORDIAMO CHE } \cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}, \ \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \right)$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ \frac{2(-1)^k}{n\pi} & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin(k\pi)}_{0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(k\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$



$$\Rightarrow \quad c_{2k} = 0 \qquad c_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)}$$

NOTA c_k Reali ($\varphi = 0$)

$$a_0 = c_0 = 1/2$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} & \text{se } n = 2k \end{cases}$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)_{\alpha} = 0$$

DUNQUE , in termini complessi

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} e^{i\pi(2k+1)t}$$

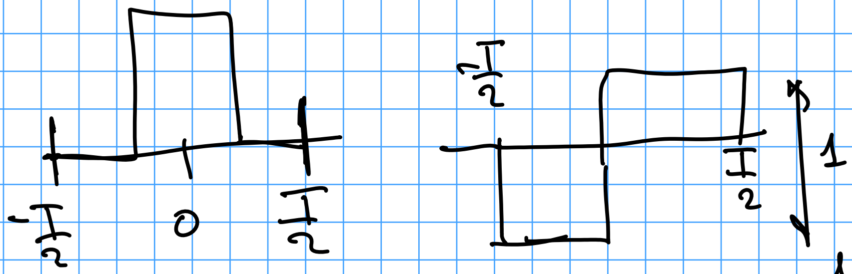
sarebbe lo stesso mettere $-k$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(-(2k+1))} e^{-i\pi(2k+1)t}$$

OPPURE, in termini reali:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos(\pi(2k+1)t)$$

NOTA: L'ONDA QUADRA HA SOLO ARMONICHE DISPARI



NOTA: Consideriamo $g(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ -1/2 & \text{se } -1 \leq t < 0 \end{cases}$

ALLORA $g(t) = f\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$ (TRASLO IL GRAFICO VERSO DX di $T_0 = 1/2$)

VEDIAMO, IN GENERALE, COM'È FATTO LO SVILUPPO DI

$\tilde{f}(t) = f(t-t_0)$. LA COSA FACILE È CALCOLARE I $\tilde{c}_m$

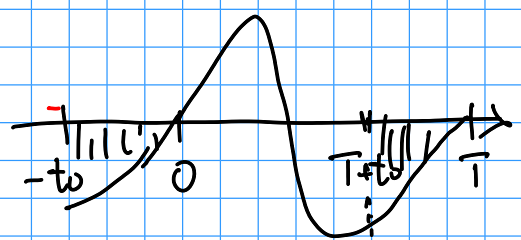
$$\tilde{c}_m = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(t)\, e^{-im\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-t_0)\, e^{-im\omega t}\, dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t-t_0)\, e^{-im\omega(t-t_0)}\, e^{-im\omega t_0}\, dt \qquad (\tau = t-t_0)$$

$$\frac{1}{T}\int_{-t_0}^{T-t_0} f(\tau)\, e^{-im\omega\tau}\, d\tau \cdot e^{-im\omega t_0} =$$

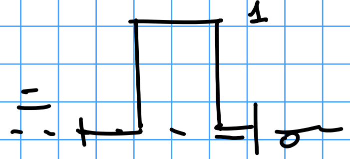
perché sto integrando una funzione T periodica

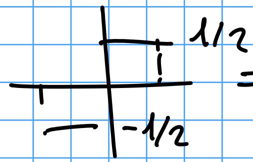
$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)\, e^{-im\omega\tau}\, d\tau \cdot e^{-im\omega t_0} = c_m\, e^{-im\omega t_0}$$



$$\boxed{\text{SE } \tilde{f}(t) = f(t-t_0) \Rightarrow \tilde{c}_m = c_m\, e^{-im\omega t_0}}$$

TORNANDO ALLE ONDE QUADRE DI PRIMA

$f(t) =$ 

$g(t) =$  $= f(t-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$

$$c_m = \begin{cases} 0 & m \text{ PARI } \neq 0 \\ \dfrac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} & m = 2k+1 \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

$\omega = \pi$

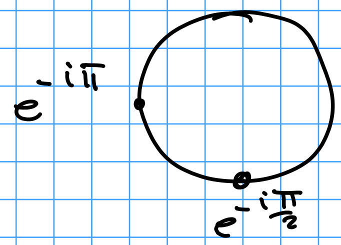
$t_0 = 1/2$

$$\tilde{c}_m = \begin{cases} 0 & m \text{ PARI} \\ \dfrac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{2}} & = \rightarrow \end{cases}$$

$$\tilde{c}_0 = 0$$

ANGOLO

$$= \rightarrow \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} e^{-ik\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ -i}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}} =$$



$$\frac{2i(-1)^k(-1)^k}{\pi(2k+1)} = \frac{2i}{\pi(2k+1)}$$

DUNQUE $\quad g(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2i}{\pi(2k+1)} e^{i(2k+1)\pi t} +$

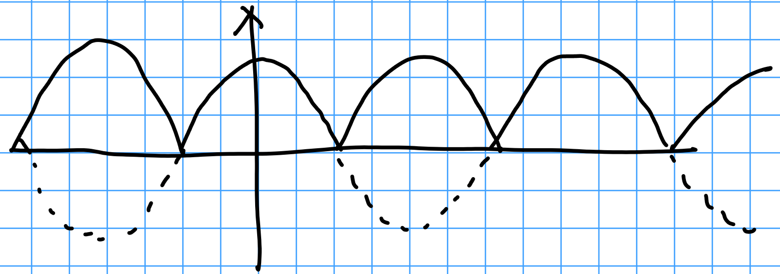
$2i \sin(2k\pi t)$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2i}{\pi(-(2k+1))} e^{-i(2k+1)\pi t} =$$

$$\ldots - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi t)$$

(GIÀ VISTA SE $T = \pi$)

ESEMPIO 2 $\quad f(t) = |\cos(t)|$ è π-periodico



$$\boxed{\omega = 2}$$

→ "la base" è fatta da

e^{-i2nt} / $\cos(2nt)$, $\sin(2nt)$

calcoliamo i c_n

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\, e^{-i2nt}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\, e^{-i2nt}\, dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\, e^{-2int}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(1-2n)it}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-(1+2n)it}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-2n)it}}{(1-2n)i}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-(1+2n)it}}{-(1+2n)i}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{(1-2n)\frac{i\pi}{2}} - e^{-(1-2n)\frac{i\pi}{2}}}{(1-2n)i} - \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-(1+2n)\frac{i\pi}{2}} - e^{(1+2n)\frac{i\pi}{2}}}{(1+2n)i} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\;\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-ni\pi}-e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{+ni\pi}\right)}{(1-2n)\,i}-\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-ni\pi}-e^{i\frac{\pi}{2}}e^{ni\pi}}{(1+2n)\,i}=$$

$$e^{-ni\pi}=e^{ni\pi}=(-1)^n$$

$$\frac{(-1)^n}{\pi(1-2n)}\;\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}-e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i}-\frac{(-1)^n}{\pi(1+2n)}\;\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}-e^{i\frac{\pi}{2}}}{2i}=$$

$$\frac{(-1)^n}{\pi(1-2n)}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}+\frac{(-1)^n}{\pi(1+2n)}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}=\frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{1-2n}+\frac{1}{1+2n}\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{\pi}\;\frac{2}{1-4n^2}$$

$$\boxed{c_n=\frac{(-1)^n}{\pi}\;\frac{2}{1-4n^2}}$$

TORNA CHE $c_n\sim\frac{1}{n^2}$ INFATTI $f(t)$ è CONTINUA

$\Rightarrow$ la serie converge UNIFORMEMENTE

$$\left(\text{VERIFICA}:\quad c_0=\frac{2}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)\,dt\quad \text{GIUSTO}\right)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\;,\quad n\geq 1\quad a_n=2\,\mathrm{Re}(c_n)=\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n) = 0$$

FATTO: se so lo sviluppo complesso $\Rightarrow$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

MODULO COMPLESSO

COSA OTTENIAMO APPLICANDO PARSEVAL ALLA FUNZIONE DI PRIMA.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

$\leftarrow a_n \; : \; a_{-n} = a_n$

IL PEZZO DI SX: $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t)\,dt}_{=0} = \frac{\pi}{2}$$

IL PEZZO DI DX: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

DUNQUE

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = -\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2} \iff$$

(se non ci sono errori)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$

DISCORSO SULLA CONVERGENZA.

ABBIAMO SEMPRE SCRITTO

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega t}$$

(questo è la versione complessa – stesso discorso per la versione reale)

VALE VERAMENTE ??
NON SEMPRE (VEDI IL CASO DI UN SALTO)

$$\left(c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt\right)$$

ABBIAMO DETTO CHE

- Se f è regolare a tratti la serie tende PUNTUALMENTE

a $\dfrac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ (che è $= f(t)$ dove f è continua)

- Con ipotesi aggiuntive (per es. f con derivata seconda)

$\Rightarrow$ l'eguale vale in senso uniforme. Potrei

scrivere

$$f \underset{\text{UNIF.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_n e^{imωt}$$

per dire che la serie CONVERGE UNIFORMEMENTE A f

QUESTO È SICURAMENTE VERO SE $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$

(in effetti: $\max_{0 \le t \le T} |c_m e^{imωt}| = |c_m|$ ... CONV. TOTALE)

- PERALTRO SI PUÒ DIMOSTRARE che se f è solo continua non è detto che la serie di Fourier converga in qualche punto — POTREBBE ESSERE NON CONV. IN NESSUN t.

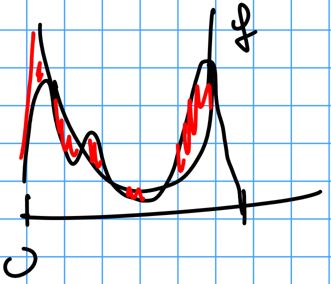
- SI PUÒ AL CONTRARIO DIMOSTRARE CHE se f HA ENERGIA FINITA cioè se

$\int_0^T |f(t)|^2 \, dt$, allora

f_K

$$\lim_{K \to \infty} \int_0^T \left(f(t) - \sum_{m=-K}^{K} c_m e^{im\omega t} \right)^2 dt = 0$$

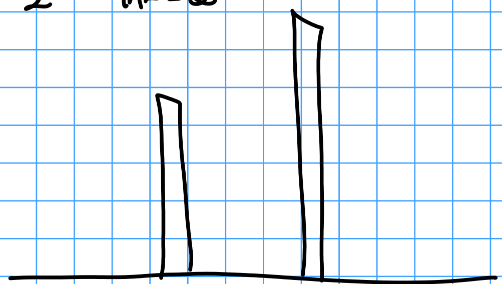
$\sim \sum_{m=-K}^{K} c_m e^{im\omega t}$ "TENDE IN ENERGIA" A f



QUELLO, CHE TENDE A ZERO È L'ENERGIA DELLA DIFFERENZA, CIOÈ L'AREA DEL QUADRATO DELLA DIFFERENZA

LO POTREI INDICARE COSÌ:

$$f \underset{2}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t}$$



Possibili esercizi:

VEDERE SUL SITO PERSONALE I COMPITI DI "COMPLEMENTI DI MATEMATICA" (LIMITATAMENTE ALLE SERIE DI FOURIER)