Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 47, 31 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

CONCLUSIONE (Bessel e c.)

Sol dell' eq. calore sul disco $B = \{x^2+y^2 \le R^2\}$
(dato nullo al bordo $S = \{x^2+y^2 = R^2\}$)

- CERCO SOL. in coordinate polari $\hat{u}(t, \rho, \theta)$.
- CERCO SOL. "A VARIABILI SEPARATE"

$$\hat{u}(t, \rho, \theta) = \psi(t)\, \phi(\rho)\, T(\theta)$$

(rinunciando alla condizione iniziale generale)

- TROVO LE SEG EQUAZIONI : $\exists\, \mu > 0$, $\exists\, m \geq 0$ INTERO:

$$\psi' = -\mu^2 \psi \implies \psi(t) = A e^{\underline{\underline{-\mu^2}} t} \quad \text{(nel tempo)}$$

$\mu = \mu_{m,R}$

$$T'' = -m^2 T \implies T(\theta) = B \cos(m\theta + \varphi)$$

$$(*) \begin{cases} \rho^2 \phi'' + \rho \phi' + (\mu^2 \rho^2 - m^2)\phi = 0 \\ \phi(R) = 0 \end{cases}$$

Per risolvere $(*)$ prendo $\tilde{\phi}(\rho) = \phi\left(\frac{\rho}{\mu}\right)$ $\quad (x = \mu\rho)$

$$\implies (**) \begin{cases} x^2 \tilde{\phi}''(x) + x \tilde{\phi}'(x) + (x^2 - m^2)\tilde{\phi}(x) = 0 \end{cases}$$

$\tilde{\Phi}(\mu R) = 0$

(**) si risolve per serie: $\tilde{\Phi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

FACENDO I CONTI TROVO LE CONDIZIONI

(a) $m^2 a_0 = 0$

(b) $(1 - m^2) a_1 = 0$

(c) $a_k (k^2 - m^2) = - a_{k-2}$ se $k \geq 2$

Se $m = 0$ a_0 QUALUNQUE (a)

$a_1 = 0$ (b)

(c) $\Rightarrow$ tutti gli a_k con k PARI sono ricavabili

tutti gli a_k con k DISPARI SONO $= 0$

MI TROVO UNA FUNZIONE $J_0(x) = \sum c_h x^{2h}$ $(c_0 = 1)$

$(c_h = a_{2h})$ con $J_0(0) = 1$ e quindi

la sol di (**) $(m=0)$ è $a_0 J_0(x)$

J_0 è la PRIMA FUNZ DI BESSEL $\Rightarrow \tilde{\phi}(\rho) = J_0(\mu\rho)$

($\Rightarrow$ MI DÀ LE SOL. DELL'EQ. CALORE INDIPENDENTI DA θ – perché $n=0$)

LA CONDIZIONE $\tilde{\phi}(\mu R) = 0$ IMPONE CHE

μR SIA UNO ZERO DI $J_0(x)$

SI SA CHE ESISTE UNA SUCC. $z_{0,k}$ di

ZERI PER $J_0(x)$ e per ognuno di questi zeri ho

un valore di $\mu = \mu_{0k} = \dfrac{z_{0k}}{R}$

$n = 1$ RICORDO LE CONDIZIONI

(a) $n^2 a_0 = 0$

(b) $(1 - n^2) a_1 = 0$

(c) $a_k (k^2 - n^2) = -a_{k-2}$ se $k \geq 2$

(a) $\Rightarrow$ $a_0 = 0$

(b) NESSUNA CONDIZIONE (a_1 LIBERO)

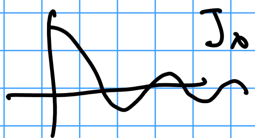
(c) $\Rightarrow$ tutti gli a_K con K PARI sono NULLI

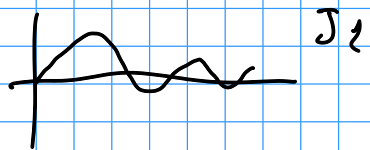
tutti gli a_K con K DISPARI sono $\neq 0$ e sono DETERMINATI DA a_1

TROVO $J_1(x)$ sol. con $a_1 = 1$

$(J_1(0) = 0, \; J_1'(0) = 1)$ Tale che ogni sol di tale è

$a_1 \, J_1(x)$ $\left(J_1(x) = \sum c_{2n+1} \, x^{2n+1} \right)$





ANCHE J_1 ha ∞ zeri $z_{1,k}$ $\Rightarrow$ $\mu_{1,k} = \frac{z_{1,k}}{R}$

$\tilde{\phi}(\rho) = J_1(\mu_{1,k}\, \rho)$. - -

$m \geq 2$

(a) $\quad n^2 a_0 = 0$

(b) $\quad (1-n^2) a_1 = 0$

(c) $\quad a_K (K^2 - n^2) = - a_{K-2} \quad$ se $K \geq 2$

(a) e (b) $\Rightarrow a_0 = a_1 = 0 \Rightarrow a_K = 0$ se $K < n$

$\left(a_K = - \frac{a_{K-2}}{K^2 - n^2} \Rightarrow a_K = 0 \text{ fino a che } K^2 - n^2 \neq 0 \right)$

$\Rightarrow a_K = 0 \quad \forall K$ con PARITÀ $\neq n$, perché

se n è pari $\Rightarrow K^2 - n^2 \neq 0 \quad \forall K$ dispari $\Rightarrow$

$a_K = 0 \quad \forall K$ dispari (stesso discorso se n è dispari)

VICEVERSA se prendo i K con la stessa parità di n

trovo che

- $a_K = 0$ se $K < n$
- a_n è libero
- se $K \geq n+1$ a_K è determinato da a_n ed è $\neq 0$

$\Rightarrow$ TROVO $J_n(x) = \sum\limits_{\substack{K \geq n \\ K \text{ CON LA STESSA PARITÀ DI } n}} a_K x^K =$

$$n = \begin{cases} 2m \\ 2m+1 \end{cases}$$

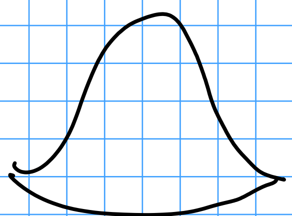
$$\underbrace{J_{2m}}_{n}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k \, x^{2k}$$

$$J_{2m+1}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k \, x^{2k+1}$$

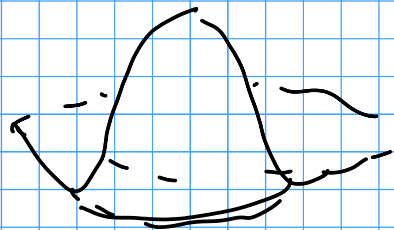
ognuna di queste funzioni ha una successione di zeri $z_{n,h}$ ..
e si ripete lo stesso discorso di prima

OGNUNA DI QUESTE $J_n(x)$ HA LE PRIME $n-1$ derivate nulle in zero e (CONVENZIONALMENTE) $J^{(n)}(0) = 1$

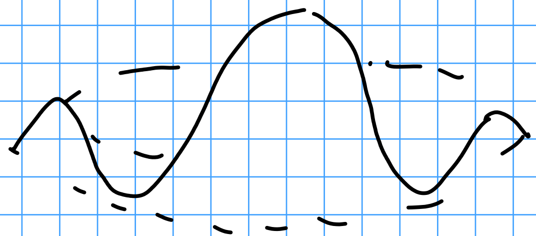
$n = 0$



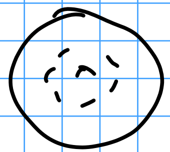
$h = 1$



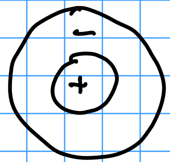
$h = 2$



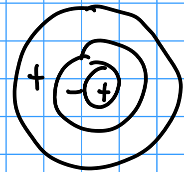
LINEE DI LIVELLO ($m=0$)



$h=1$

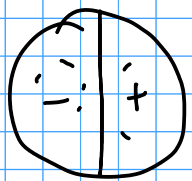


$h=2$

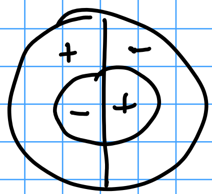


$h=3$

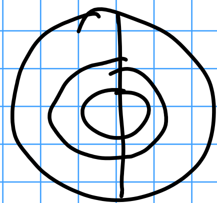
$\underline{m=1}$



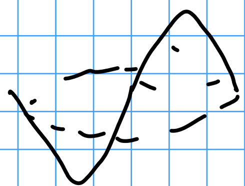
$h=1$



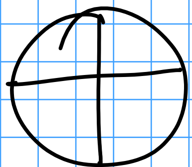
$h=2$



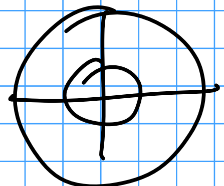
$h=3$ . .



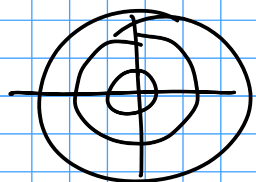
$m=2$



$h=1$



$h=2$



$h=3$

COSA POSSO SPERARE DI FARE SE VOGLIO RISOLVERE L'EQ. GENERALE

POSSO CERCARE LA SOL. GENERALE COME

$$\sum_{m,k} c_{mk} \hat{u}_{m,k}(t, \rho, \theta)$$

IN EFFETTI LA COSA SI PUÒ FARE IMITANDO QUANTO FATTO CON LE SERIE DI FOURIER

– IO VORREI ESPRIMERE OGNI FUNZIONE $f(\rho, \theta)$

COME $$\sum_{m,k} c_{mk} \boxed{\phi_{m,k}(\rho)\, T_m(\theta)} = f(\rho, \theta)$$

LO POSSO FARE E PER QUESTO È FONDAMENTALE

NOTARE CHE LE $\phi_{m,k}$ SONO "ORTOGONALI" NEL SENSO

$$\int_0^R \phi_{m,j}(\rho)\, \phi_{m,i}(\rho)\, d\rho = 0 \qquad \text{se } (m,j) \neq (m,i)$$

(lo si ricava dall'equazione)

DISCORSI AGGIUNTIVI SU FOURIER.

RICORDIAMO L'IDEA. Se f: T-periodica, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\Rightarrow$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad (\text{in qualche senso})$$

SI PUÒ DARE UNA "VERSIONE COMPLESSA" DI QUESTA FORMULA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodica $\left(f(t+T) = f(t) \right)$

VORREI SCRIVERE

$$(\ast) \quad \boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}}$$

[RICORDO CHE $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$]

Se rifaccio i conti: dato $k \in \mathbb{Z}$ prendo la $(\ast)$, moltiplico per $e^{-ik\omega t}$ e integro tra 0 e T - se tutto va bene trovo

$$\int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^T e^{in\omega t} e^{-ik\omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^T e^{(n-k)i\omega t} dt$$

È FACILE VEDERE che se $m \neq K$

$$\int_0^T e^{(m-k)i\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{(m-k)i\omega t}}{(m-k)i\omega}\right]_0^T = 0$$

(perché $e^{ih\omega t}$ è T periodico, qualunque sia $h \in \mathbb{Z}$)

MENTRE SE $m = K$ TROVO

$$\int_0^T 1\,dt = T$$

DUNQUE nella serie scritta sopra rimane solo $m = K \Rightarrow$

$$\int_0^T f(t)\,e^{-ik\omega t}\,dt = c_K T$$

$$\Rightarrow \quad c_K = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-ik\omega t}$$

IN EFFETTI SI DIMOSTRA CHE QUESTI PASSAGGI SONO LECITI E CHE VALE IL TEOREMA

TEOREMA Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ REGOLARE A TRATTI, T periodica

POSTO $\boxed{c_K := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-ik\omega t}}$, allora la serie

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imwt} \quad (= f(t)) \quad \left(w = \frac{2\pi}{T}\right)$$

converge puntualmente a $\dfrac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$

per ogni t_0 (e $f(t_0)$ se f è continua in t_0) #

CHE LEGAMI TRA I c_n e gli a_n, b_n di prima?

PARTIAMO DALLA FORMULA COMPLESSA. Scriviamo

$$\boxed{c_m = \alpha_m + i\beta_m} \qquad \alpha_m, \beta_m \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imwt} =$$

$$c_0 e^{i0wt} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_m e^{imwt} + c_{-m} e^{-imwt}\right) =$$

$$c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m + i\beta_m)(\cos(mwt) + i\sin(mwt)) +$$

$$(\alpha_{-m} + i\beta_{-m})(\cos(-mwt) + i\sin(-mwt)) =$$

$$c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m + i\beta_m)(\cos mwt + i\sin(mwt)) +$$

$$(\alpha_{-m} + i\beta_{-m})(\cos(m\omega t) - i\sin(m\omega t)) =$$

$$= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m + i\beta_m + \alpha_{-m} + i\beta_{-m}) \cos(m\omega t) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (i\alpha_m - \beta_m - i\alpha_{-m} + \beta_{-m}) \sin(m\omega t)$$

SUPPONIAMO f a valori reali $\Rightarrow$ i TERMINI COMPLESSI DEVONO SPARIRE

$$\beta_m = -\beta_{-m} \qquad \text{(i } \beta_k \text{ sono "DISPARI" rispetto a } k\text{)}$$

$$\alpha_m = \alpha_{-m} \qquad \text{(gli } \alpha_k \text{ sono "PARI" in } k \text{)}$$

$c_0 \in \mathbb{R}$ $(\beta_0 = 0)$

(IN TERMINI COMPLESSI $c_{-k} = \overline{c_k}$) $\Rightarrow$

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{2\alpha_m}_{a_m} \cos(m\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{-2\beta_m}_{b_m} \sin(m\omega t)$$

DUNQUE

$$a_0 = \alpha_0$$

$$a_m = 2\alpha_m = c_m + c_{-m}$$

$$b_m = -2\beta_m = c_{-m} - c_m$$

QUESTO È IL LEGAME TRA GLI a_n, b_n e i c_n della formula complessa.

UN ALTRO SIGNIFICATO DEI c_k si scopre scrivendo

$$c_n = A_n e^{i\varphi_n} \qquad \left(\begin{array}{l} A_n = |c_n| \\ \varphi_n = \text{argomento di } c_n \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{i\varphi_n} e^{in\omega t} =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{i(n\omega t + \varphi_n)} =$$

$$A_0 e^{i\varphi_0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i(n\omega t + \varphi_n)} + A_{-n} e^{i(-n\omega t + \varphi_{-n})}$$

Se f è reale deve esse. $\varphi_0 = 0$ $A_{-n} = A_n$, $\varphi_{-n} = -\varphi_n$
(SI VEDE ..)

da cui

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

DUNQUE $2|c_n|$ = AMPIEZZA DELLA COMPONENTE DI FREQUENZA $n\omega$

φ_n = FASE DELLA MEDESIMA COMPONENTE