Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 46, 26 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Eq. calore nel disco $B_R = \{x^2+y^2 \le R\}$

$$(E.C.)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(0,x,y) = u_0(x,y) \quad \text{(ASSEGNATA)} & \text{CONDIZIONE INIZIALE} \\ u(t,x,y) = 0 \text{ se } x^2+y^2 = R^2 & \text{CONDIZIONE AL BORDO} \end{cases}$$

Se passo in coordinate polari: $\hat{u}(t,\rho,\theta) = u(t,\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2}\hat{u} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\hat{u} \\ \hat{u}(0,\rho,\theta) = \hat{u}_0(\rho,\theta) \quad \text{(ASSEGNATA)} \\ \hat{u}(t,R,\theta) = 0 \end{cases}$$

CERCHIAMO SOL. del tipo $\hat{u}(t,\rho,\theta) = \psi(t)\phi(\rho)T(\theta)$

con $\phi(R)=0$ (e T 2π PERIODICA) (Rinunciando alla condizione iniziale) si è visto

che se una tale $\hat{u}$ verifica l'equazione allora esistono

$\mu > 0$ e $n \geq 0$ INTERO TALI CHE

(1) $\psi'(t) = -\mu^2 \psi(t) \quad \rightarrow \quad \psi(t) = \psi_0 e^{-\mu^2 t}$

(2) $T''(\theta) = -n^2 T(\theta) \quad \rightarrow \quad T(\theta) = \gamma_0 \cos(n\theta + \varphi_0)$

(3) $\rho^2 \phi'' + \rho \phi' + (\mu^2 \rho^2 - n^2)\phi = 0$

FACCIAMO UN CAMBIO DI VARIABILE IN (3) ponendo

$\tilde{\phi}(\rho) = \phi(\rho/\mu)$; allora

$\tilde{\phi}'(\rho) = \frac{1}{\mu} \phi'(\rho/\mu) \qquad \tilde{\phi}''(\rho) = \frac{1}{\mu^2} \phi''(\rho/\mu)$ e quindi:

$$\rho^2 \tilde{\phi}'' + \rho \tilde{\phi}' + (\rho^2 - n^2)\tilde{\phi} = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^2 \phi''\left(\frac{\rho}{\mu}\right) + \left(\frac{\rho}{\mu}\right) \phi'\left(\frac{\rho}{\mu}\right) + \left(\mu^2\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^2 - n^2\right)\phi\left(\frac{\rho}{\mu}\right) = 0$$

QUINDI PER RISOLVERE (3) per un certo $\mu > 0$, basta risolvere

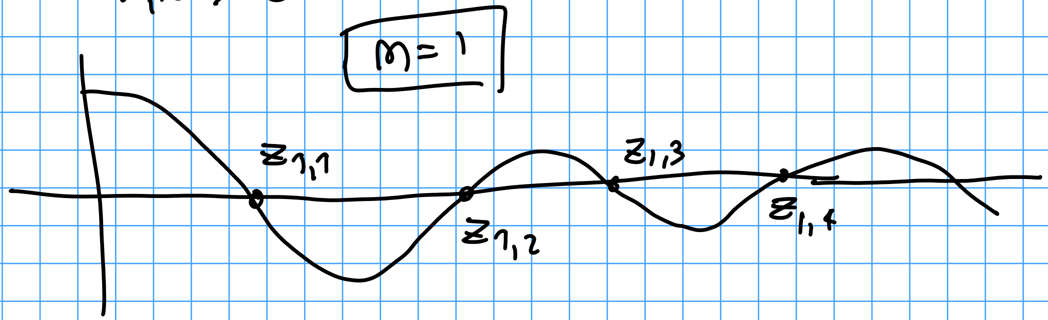
$(\tilde{3}) \quad \rho^2 \tilde{\phi}'' + \rho \tilde{\phi}' + (\rho^2 - n^2)\tilde{\phi} = 0$

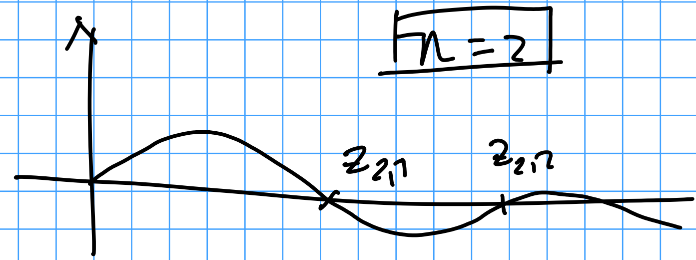
EQUAZIONE DI BESSEL DI ORDINE n

e prendere $\phi(\rho) = \tilde{\phi}(\mu\rho)$ NOTA: Le cond. $\phi(R) = 0$ diventa $\tilde{\phi}(\mu R) = 0$

COME SI VEDE NEL FILE ALLEGATO (Bessel.pdf): per ogni n

l'equazione $(\tilde{3})$ ha soluzione $\tilde{\Phi}(x) = J_m(x)$. Sappiamo che J_m ha infiniti zeri $z_{m,k} > 0$ $\quad k \in \mathbb{N}$





Dato che si vuole $\tilde{\Phi}(\mu R) = 0$, ne segue che μ deve essere della forma $\mu = \mu_{m,k} = \dfrac{z_{m,k}}{R}$. Riassumendo possiamo dire che per ogni m intero $m \geq 0$ e ogni $k \geq 1$ abbiamo trovato

$$\hat{u}(t, \rho, \theta) = A e^{-\mu_{m,k}^2 t} \cos(m\theta + \varphi) J_m(\mu_{m,k}\rho) =$$

$$A e^{-\frac{z_{m,k}^2}{R^2} t} \cos(m\theta + \varphi) J_m\left(z_{m,k} \frac{\rho}{R}\right)$$

dove J_m è l'n-esima funzione di Bessel e $z_{m,k}$ $k = 1 \dots$ sono i suoi zeri