# Analisi Matematica II


## prof. Claudio Saccon (*)


Lezione 45, 25 marzo 2014


(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

EQ. CALORE

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \left( + f(t,x) \right) \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{(CONDIZIONE INIZIALE)} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \text{(CONDIZIONE AGLI ESTREMI)} \end{cases}$$

c costante ... lo metto 1

OSSERVAZIONE: se il termine noto $f(t,x)$ non è zero (eq. non omogenea $\Rightarrow$ si fa nello stesso modo con le differenze che si scrive $f$ come serie di Fourier (in $x$)

$$f(t,x) = \sum f_n(t) \sin(n\omega_1 x)$$

e quindi, quando si cerca $u(t,x) = \underbrace{\sum b^*_n(t) \sin(n\omega_1 x)}$

si arriva:

$$b^{*\prime}_n(t) + n^2\omega_1^2 b_n(t) = f_n(t) \qquad \forall n \geq 1$$

Questa equazione si risolve ($f_n(t)$ è nota) $\Rightarrow$ si trova $b^*_n(t)$

... si scrive $u(t,x)$ ..

$$\left[ \quad b^*_n(t) = e^{-n^2\omega_1^2 t} \left( \underset{\text{noto}}{b^*_n(0)} + \int_0^t e^{n^2\omega_1^2 \tau} \underset{\text{noto}}{f_n(\tau)} \, d\tau \right) \right]$$

OSSERVAZIONE (parte scritta in rosso alla fine dell'ultima lezione)

CERCHIAMO LE SOL. DI $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ del tipo

$$\boxed{\begin{array}{l} u(t,x) = f(t)\, g(x) \\ g(0) = g(L) = 0 \end{array}}$$

[ SEPARAZIONE DELLE VARIABILI ]

(NON POSSO SPERARE CHE $u(t,x) = f(t)\, g(x)$ VERIFICHI LA CONDIZIONE INIZIALE A MENO CHE $u_0(x)$ NON SIA SPECIALE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(t)\, g(x) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)\, g''(x)$$

SE IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE:

$$f'(t)\, g(x) = f(t)\, g''(x)$$

DIVIDO PER $f(t)\, g(x)$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{f'(t)}{f(t)} = \dfrac{g''(x)}{g(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} \text{ e } \frac{g''(x)}{g(x)} \text{ sono}$$

DIPENDE SOLO DA $t$

DIPENDE SOLO da $x$

entrambe uguali a una costante

$\Rightarrow$ (1) $f'(t) = k f(t)$ / (2) $g''(x) = k g(x)$

$g(0) = g(L) = 0$

CON K DA DETERMINARE !

DA (2) si vede che $\underline{\underline{k<0}}$ (se g non è nulla). INFATTI:

MOLTIPLICO LA (2) PER $g(x)$ e integro su $[0, L]$:

$$\int_0^L g''(x) g(x)\, dx = k \underbrace{\int_0^L g^2(x)\, dx}_{>0}$$

$\Vert$ (per parti)

$$\underbrace{\left[ g'(x) g(x) \right]_0^L}_{=0 \text{ perché } g(0)=g(L)=0} - \int_0^L g'(x) g'(x)\, dx = \underbrace{-\int_0^L g'(x)^2\, dx}_{<0}$$

$\Big\}$ $k<0$

INVECE DI $k$ metto $-k^2$; RISCRIVO LE EQ.

(1) $f'(t) = -k^2 f(t)$ $\Rightarrow$ $f(t) = f(0)\, e^{-k^2 t}$

$\Uparrow$

$C$

$$\boxed{(2) \quad g''(x) = -k^2 g(x) \quad ; \quad g(0) = g(L) = 0}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

$$g(0) = g(L) = 0$$

$$g(0) \Rightarrow \quad A + B\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow A = 0$$

$$g(x) = B\sin(kx)$$

$g(L) = 0 \qquad B\sin(kL) = 0 \iff B$ qualunque MA

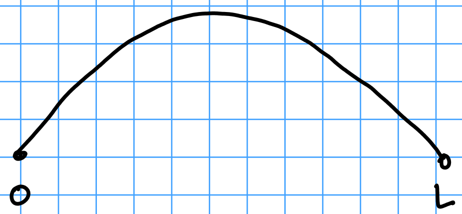
$$kL = m\pi$$

cioè $\quad k = \frac{m\pi}{L} \quad (= m\omega_1) \qquad \boxed{\omega_1 := \frac{\pi}{L}}$

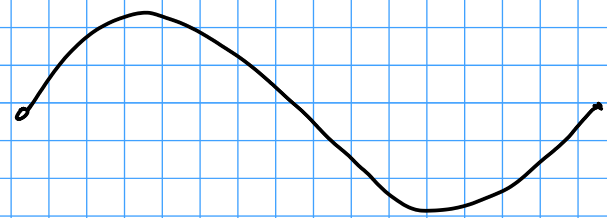
DUNQUE $\quad g(x) = B\sin(m\omega_1 x)$

e $\quad f(t) = c\, e^{-m^2\omega_1^2 t}$

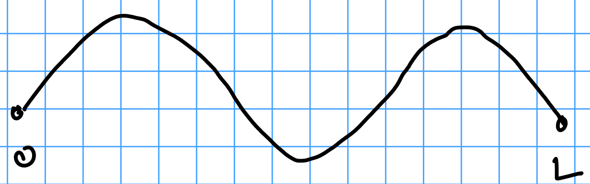
$m = 1$




$m = 2$



$m = 3$




QUESTE SONO LE SOLUZIONI "A VAR. SEP."

"MODI FONDAMENTALI"

LA SERIE DI F. si può dunque interpretare dicendo che

IO VOGLIO TROVARE LA SOL. GENERALE COME SOVRAPPOSIZIONE (SERIE) DI QUESTI "MODI FONDAMENTALI"

---

CASO BIDIMENSIONALE : $u(t,x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$

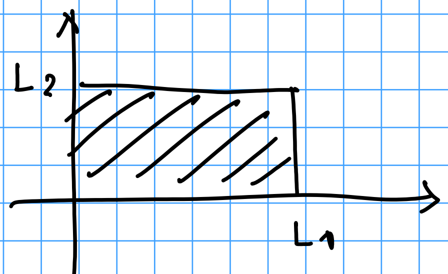
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = c\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
u(0,x,y) = u_0(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \\
u(t,x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \partial\Omega
\end{cases}
$$

metto $c = 1$ ...

NOTA : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u$ (OPERATORE DI LAPLACE APPLICATO A $u$)

CASO $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ (RETTANGOLO)



$\omega_1 := \pi / L_1$

$\omega_2 := \pi / L_2$

CERCO $u(t,x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm}(t) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$

$$\left( \sum_m \underbrace{B_m(t,x)}_{\uparrow} \sin(m\omega_2 y) \right)$$

LI SVILUPPO SECONDO F. IN X

$$\sum_n b_{nm}(t) \sin(n\omega_1 x)$$

FORMALMENTE :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n\,m} b_{nm}'(t) \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n\,m} b_{nm}(t)\left(-n^2\omega_1^2\right) \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n\,m} b_{nm}(t)\left(-m^2\omega_2^2\right) \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$\Delta u = \sum_{n\,m} b_{nm}(t)\left(-n^2\omega_1^2 - m^2\omega_2^2\right) \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

SE IMPONGO L'EQUAZIONE ... TROVO

$\forall n,m$ $\qquad b_{nm}'(t) + \left(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2\right) b_{nm}(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad b_{nm}(t) = b_{nm}(0)\, e^{-\left(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2\right)t}$$

$$\boxed{u(t,x,y) = \sum_{n,m} e^{-\left(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2\right)t}\, u_{0,n,m} \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)}$$

DOVE $u_{0,n,m}$ (NOTI) $= \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} u_0(x,y) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)\, dx\, dy$

CASO $\Omega =$ CERCHIO , $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2\}$

I° PASSO $\rightarrow$ COORDINATE POLARI

DATA $u(x,y)$ prendo $\boxed{\hat{u}(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}$

VOGLIO ESPRIMERE $\Delta u$ in termini di $\hat{u}$ !

[NEL SEGUITO USO $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ ]

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\sin\theta$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)(-\rho \sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,\rho\cos\theta \leftarrow$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\theta \cdot \sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta}_{2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cancel{\sin}\theta\cos\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

SOMMANDO SPARISCONO

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\rho^2\sin^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(-\rho^2\sin\cancel{\theta}\cos\theta) - \frac{\partial u}{\partial x}\rho\cos\theta$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \rho^2\cancel{\sin\theta}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rho^2\cos^2\theta - \frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$- \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta =$$
$$\Delta u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho}$$

DUNQUE:

$$\Delta u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \theta}$$

(LAPLACIANO IN COORDINATE POLARI)

SE PONGO $\hat{u}(t,\rho,\theta)$ TROVO L'EQ.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u} = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2}\hat{u} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\ u(0,\rho,\theta) = u_0(\rho,\theta) \\ u(t,R,\theta) = 0 \qquad \forall \theta, \forall t \end{cases}$$

II° CERCO LE "SOL. FONDAMENTALI" PER SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

$$\hat{u}(t,\rho,\theta) = \Psi(t)\,\phi(\rho)\,\Gamma(\theta)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \Psi'(t)\,\phi(\rho)\,\Gamma(\theta)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\hat{u} = \psi(t)\left(\left(\phi''(\rho) + \frac{1}{\rho}\phi'(\rho)\right)\Gamma(\theta) + \frac{1}{\rho^2}\psi(t)\phi(\rho)\Gamma''(\theta)\right)$$

$\Downarrow$ TROVO L'EQ.

$$\psi'(t)\,\phi(\rho)\,\Gamma(\theta) = \psi(t)\,\Gamma(\theta)\left(\phi''(\rho) + \frac{1}{\rho}\phi'(\rho)\right) + \psi(t)\,\phi(\rho)\,\frac{1}{\rho^2}\,\Gamma''(\theta)$$

DIVIDO PER $\psi(t)\,\phi(\rho)\,\Gamma(\theta)$

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{1}{\phi(\rho)}\left(\phi''(\rho) + \frac{1}{\rho}\phi'(\rho)\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Gamma(\theta)}\Gamma''(\theta) = \lambda = -\mu^2$$

DIPENDE SOLO DA $t$ $\qquad$ DIPENDE DA $(\rho, \theta)$

$\Rightarrow$ DEVE ESISTERE UNA COSTANTE $\lambda$ tale che

$$\boxed{\psi'(t) = \lambda \psi(t)}$$

$\lambda =$

$$\circledast \begin{cases} \phi''\Gamma + \frac{1}{\rho}\phi'\Gamma + \frac{1}{\rho^2}\Gamma''\phi = \lambda\,\phi\,\Gamma \\ \phi(R) = 0 \end{cases}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\lambda < 0$ - DIAMOLO PER BUONO

(IN TERMINI DI $(x,y)$ $\Delta u(x,y) = \lambda\, u(x,y)$ )

CHIAMO $\lambda = -\mu^2$

DA $\circledast$ MOLTIPLICANDO PER $\rho^2$

$$\frac{\rho^2}{\phi}\left(\phi'' + \frac{1}{\rho}\phi'\right) + \frac{\Gamma''}{\Gamma} = -\mu^2\rho^2$$

cioè

$$\underbrace{\frac{\rho^2\phi'' + \rho\,\phi' + \mu^2\rho^2\phi}{\phi}}_{\text{FUNZIONE DI } \rho} = \underbrace{-\frac{\Gamma''}{\Gamma}}_{\text{FUNZIONE DI } \theta}$$

$\Rightarrow$ Esiste un'altra costante $\gamma$ tale che

$$\Gamma''(\theta) = -\gamma\,\Gamma(\theta) \qquad \text{e} \qquad \rho^2\phi'' + \rho\,\phi' + \mu^2\rho^2\phi = \gamma\,\phi$$

$\boxed{\text{L'EQ. IN } \Gamma}$ DEVE AVERE SOL. $2\pi$ - PERIODICHE

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = m^2} \quad \text{per } m \geq 0 \text{ INTERO}$$

$$\text{e} \quad \Gamma(\theta) = A \cdot \cos(m\theta + \varphi) \qquad \text{con } A \geq 0 \text{ e } \varphi \in [0, 2\pi[$$

DUNQUE IN $\rho$ TROVO

$$\begin{cases} \rho^2 \phi'' + \rho \phi' + (\mu^2 \rho^2 - m^2)\phi = 0 \\ \phi(R) = 0 \end{cases}$$

← EQUAZIONE DI BESSEL $(\mu, m)$
($\mu$ ancora da determinare)