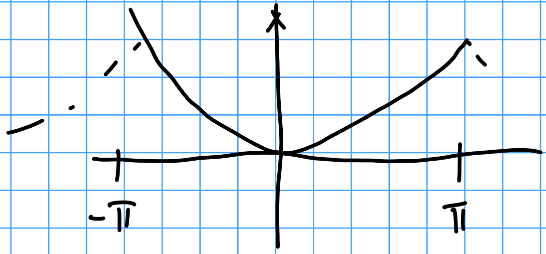
Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 44, 24 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)



$f(t) = t^2 \quad -\pi \le t \le \pi$

(e 2π periodica!

$\Rightarrow \quad b_n = 0 \quad , \quad a_0 = \dfrac{\pi^2}{3}$ (CALCOLI DELL'ALRA VOLTA!

$n \geq 1 \quad \boxed{a_n = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}}$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{\pi^3}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

<u>Se metto $t=0$</u> $\Rightarrow$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$

<u>Se metto</u> $t = \pi \quad (o \ -\pi)$

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\underbrace{(-1)^n}_{\cos(n\pi)} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

Posso anche sfruttare "l'eguaglianza di Parseval"

$$\frac{1}{T}\int_0^{T} f^2(t)\,dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

che in questo caso diventa:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

Calcolo $\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = 2\int_0^{\pi} t^4\,dt = 2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}$

e rimetto sopra

$$\frac{1}{\cancel{2}\pi}\,\frac{\cancel{2}\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \iff$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{4}{45}\,\frac{1}{8}\,\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}$$

ABBIAMO VISTO CHE UNA FUNZIONE f, DEFINITA SU $[0,T]$ si può (sotto opportune ipotesi) sviluppare come $f(t) = \sum_n a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

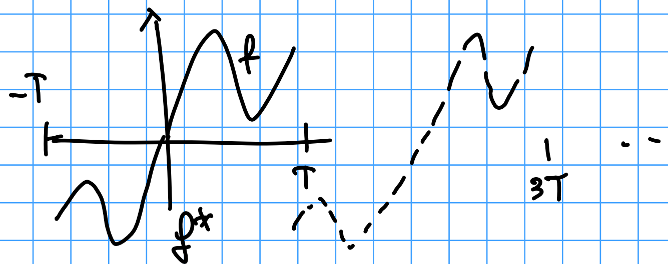
Dove l'eguaglianza $\forall t \in \mathbb{R}$ se si "periodicizza f" con periodo T.

MI PIACEREBBE SVILUPPARE f solo in sin / solo in cos

PARTIAMO DA $f : [0,T] \to \mathbb{R}$. Definiamo $f^* : [-T, T] \to \mathbb{R}$

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ -f(-t) & \text{se } -T \leq t \leq 0 \end{cases} \quad \leftarrow f^* \text{ è DISPARI}$$

POSSO ANCHE ESTENDERE f^* A $\mathbb{R}$ RENDENDOLA $2T$-periodica



$\Rightarrow$ Posso SVILUPPARE f^* in serie di Fourier di periodo $2T \to$ di frequenza angolare $\omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$

sotto le solite ipotesi

$$\Rightarrow f^*(t) \overset{*}{=} a_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cos(n\omega_1 t) + b_n^* \sin(n\omega_1 t)$$

DATO CHE f^* è DISPARI $\Rightarrow$ $a_n^* = 0$ $\forall n \geq 0$, mentre

$$b_n^* = \frac{2}{2T} \int_{-T}^{T} \underbrace{f^*(t) \sin(n\omega_1 t)}_{\text{PARI}} dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_1 t)\, dt$$

DUNQUE se $t \in [0,T]$ VALE

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \sin(n\omega_1 t) \quad \text{DOVE} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T} \qquad b_n^* = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_1 t)\, dt}$$

USANDO $\omega_1 = \frac{\omega}{2}$ TROVO UNO SVILUPPO IN SOLI SENI

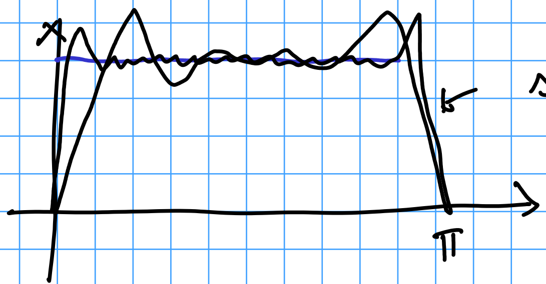
NOTA CHE $0 = \sin(n\omega_1 0) = \sin(n\omega_1 T) = \sin(n\pi)$

$\Rightarrow$ Ho scritto f come una serie di funzioni NULLE AGLI ESTREMI ANCHE SE $f(0) \neq 0$ / $f(T) \neq 0$. NATURALMENTE SE $f(0) \neq 0$ $\Rightarrow$ f^* DISCONTINUA IN 0 $\Rightarrow$ la serie "CONVERGE MALE"

PER ESEMPIO se prendo $f(t) = 1 \quad 0 \leq t \leq \pi$

noto che f^* è "l'onda quadra" già trattata $\Rightarrow$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left((2k+1)\, t\right)$$



somma finita

ANALOGAMENTE SI PUÒ SVILUPPARE IN SOLI COSENI :

Data $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ definisco $f^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ f(-t) & \text{se } -T \leq t \leq 0 \end{cases}$

e sviluppo f^* rispetto alla vel. angolare $\omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T} \Rightarrow$

$$f^*(t) = a_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cos(n\omega_1 t) + \cancel{b_n \sin(n\omega_1 t)}$$

f^* è pari

$$a_0^* = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^*(t)\,dt = \frac{1}{2T} \cdot 2 \int_0^T f(t)\,dt = \boxed{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt}$$

$$a_m^* = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}T}\int_{-T}^{T} f^*(t)\cos(m\omega_1 t)\,dt = \boxed{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega_T t)\,dt}$$

$0 \le t \le T$

QUINDI $\forall$ $f(t) = a_0^* + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \cos(m\omega_T t)$ $\qquad \omega_T = \frac{\pi}{T}$

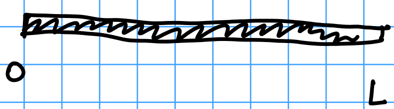
NOTA: HO SVILUPPATO f rispetto a una famiglia di funzioni

$u_m(t) = \cos(m\omega_T t)$ che hanno la proprietà $u_m'(0) = u_m'(T) = 0$

ANCHE QUI, SE f' NON SI ANNULLA IN $\{0, T\}$ $\Rightarrow$ la convergenza è "cattiva" agli estremi

---

EQUAZIONE DEL CALORE: DIFFUSIONE DEL CALORE IN UNA SBARRA (OMOGENEA) DI LUNGHEZZA L

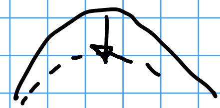


IN OGNI PUNTO $0 \le x \le L$, AL TEMPO 0 C'È UNA TEMPERATURA CHE INDICO CON $u(x)$

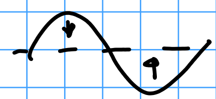
MI INTERESSA SAPERE COME "SI EVOLVE NEL TEMPO" QUESTA TEMPERATURA: INCOGNITA → UNA FUNZIONE $u(t,x)$ che rappresenta la temperatura all'istante $t \geq 0$ nel punto x

CON UNA OPPORTUNO MODELLO TROVO L'EQ.

$$(EC) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



A CUI DEVO AGGIUNGERE



$u(0,x) = u_0(x)$ ← NOTA

+ DEVO DIRE COSA SUCCEDE AGLI ESTREMI DELLA SBARRA $\forall t$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x} \\ u(0,x) = u_0 \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0 \end{cases}$$

(CASO OMOGENEO - NO SORGENTI DI CALORE)

(CONDIZIONE NULLA AL BORDO)

(NO SCAMBI DI CALORE AGLI ESTREMI

VA SCELTA UNA DELLE DUE CONDIZIONI.

IDEA: $u(t,x)$ sia sviluppabile in serie di Fourier DI SOLI SENI RISPETTO A x

cioè

$$(*) \quad u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} b^*_m(t) \sin(m\omega_1 x)$$

dove $\omega_1 = \frac{\pi}{L}$

FACCIAMO IL "DISCORSO EURISTICO" – supponiamo che valga la formula sopra e vediamo di ricavare come sono fatti i $b^*_m(t)$

DERIVANDO RISPETTO A t "DOVREI AVERE"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dt} b^*_m(t) \sin(m\omega_1 x)$$

DERIVANDO 2 VOLTE IN x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} b^*_m(t) \left(-\omega_1^2 m^2\right) \sin(m\omega_1 x)$$

SE IMPONGO L'EQUAZIONE:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} b^*_m(t) + \omega_1^2 m^2 b^*_m(t) \right) \sin(m\omega_1 x) = 0$$

PER OTTENERE QUESTO BASTA (e in realtà è necessario) CHE

$\forall m \geq 1 \qquad \frac{d}{dt} b_m^*(t) + \omega_*^2 m^2 b_m^*(t) = 0$

$\Longleftrightarrow \qquad b_m(t) = b_m(0) e^{-\omega_*^2 m^2 t}$

Se scrivo la condizione per $t = 0 \Rightarrow$

$$u_0(x) = u(0,x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(0) \sin(m \omega_* x)$$

$\Longleftrightarrow \qquad b_m(0) =$ coeff. m-esimo di $u_0(x)$

$$b_m(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(m \omega_* x)\, dx = u_{0,m}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \, u_{0,m} \sin\left(m \frac{\pi}{L} x\right)}$$

HO TROVATO UNA FORMULA PER $u(t,x)$ mediante una serie. POSSO USARE I TEOREMI SULLE SERIE DI FUNZIONI PER VEDERE SE IN EFFETTI $u(t,x)$

RISOLVE L'EQ. - IN EFFETTI SI DIMOSTRA

- FISSATO $t_0>0$, posto $M_n = \max_{t \geq t_0} \left| e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} u_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right|$

$$\leq e^{-n^2\frac{\pi^2}{L^2}t} |u_{0,n}|$$

Supponiamo che la $u_0(x)$ iniziale sia tale che $\sum |u_{0,n}| < +\infty$

$\Rightarrow \sum M_n < +\infty \Rightarrow$ $\underline{u(t,x) \text{ è continua}}$ in $t \geq t_0$

STESSO DISCORSO PER $\frac{\partial u}{\partial t}$ . . .

$$M_n^1 = \max_{t \geq t_0} \left| n^2 \frac{\pi^2}{L^2} e^{-n^2\frac{\pi^2}{L^2}t} u_{0,n} \sin(\text{—}) \right| \leq$$

$$\underbrace{\text{costante } n\, e^{-n^2\frac{\pi^2}{L^2}t_0}}\ |u_{0,n}|$$

SFRUTTANDO IL FATTO CHE $e^{-n^2\omega^2 t_0}$ $\underline{\underline{\text{VINCE}}}$ SU n^2

TROVO CHE $\frac{\partial u}{\partial t}$ è sicuro continuo su $t \geq t_0$

SI RIPETE PER OGNI DERIVATA! a dove da

$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(t)$ esiste continua per $t \geq t_0$

Se si fanno le derivate in x succede la stessa cosa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum e^{-n^2 \omega_1^2 t} (-n\omega_1) \cos(n\omega_1 x)$$

$\uparrow$

si ha conv. totale per $t \geq t_0 > 0$ TUTTO TORNA
A CAUSA DEL TERMINE $e^{-n^2 \omega_1^2 t_0}$

PER GLI STESSI MOTIVI SI PUÒ "DERIVARE PER SERIE" $\Rightarrow$

I PASSAGGI DI PRIMA SONO TUTTI LECITI $\Rightarrow$

$u(t, x)$ verifica l'eq. se $t > 0$

- INOLTRE, sempre per la conv. totale della serie si ha sopra VERO ANCHE CHE $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ se $t > 0$

- MANCA IL FATTO CHE $u(0, x) = u_0 \rightsquigarrow$

mi piacerebbe dire " $\underbrace{\lim_{t \to 0^+} u(t,x) = u_0(x)}_{\text{VALE SE SO QUALCOSA SU}} \overset{\shortparallel}{}$ $\sum |b_n(0)|$

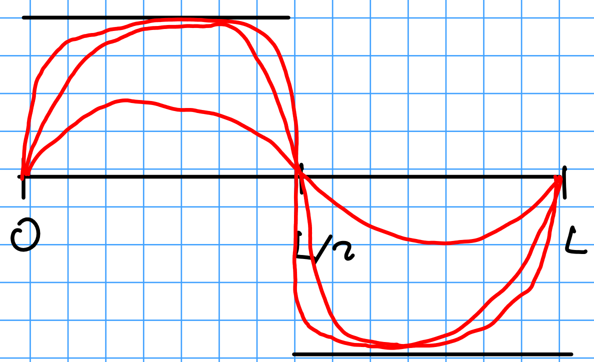
Infatti se si cerca di ripetere questo approccio su $[0, +\infty[$ invece di su $[t_0, \infty[$ NON HO PIÙ IL TERMINE $e^{-n^2\omega^2 t_0}$

POSSO SFRUTTARE LA SOMMABILITÀ DEI $u_{0,n} = b_n(0)$

QUESTO CORRISPONDE A CHIEDERE CHE LA DISTRIBUZIONE u_0 (INIZIALE) SIA "REGOLARE"

SE NON È REGOLARE, $u(t,x)$ È COMUNQUE LA SOLUZIONE. BISOGNA "DISCUTERE" IL SENSO DI

" $u(t,x) \to u(0,x)$ se $t \to 0^+$ "



$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

- Si vede anche che $\lim_{t \to \infty} u(t,x) = 0$

NOTA: si può dim. che se cerco una sol. di (E.C.) del tipo

$$u(t,x) = f(t)\,g(x)$$ (SEPARAZIONE DELLE VARIABILI)

$$g(0) = g(L) = 0$$

$g(x)$ deve essere del tipo $A \sin(n \omega_1 x)$

per $n \in \mathbb{N}$ $A \in \mathbb{R}$ $\left(\omega_1 = \frac{\pi}{L}\right)$

e $f(t) = B\, e^{-n^2 \omega_1^2 t}$