Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 43, 19 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Significato "geometrico" della serie di Fourier.

Denotiamo con

$$u_n(t) = \cos(n\omega t) \qquad (n \geq 0)$$

$$v_n(t) = \sin(n\omega t) \qquad (n \geq 1)$$

e, date due funzioni definite su $[0, T]$ indichiamo

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_0^T f(t)\, g(t)\, dt$$

che chiamiamo "prodotto scalare" tra f e g. Per definire $\langle f, g \rangle$ ci vuole ovviamente che $f(t)g(t)$ sia integrabile. Si può vedere in effetti che, affinché il prodotto scalare abbia senso, basta che f e g abbiano "energia finita", dove

$$\text{energia di } f = \int_0^T f^2(x)\, dx$$

(L'integrale può essere anche improprio ... sono un po' vago a riguardo)

Data f con energia finita indichiamo

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^T f^2(x)\, dx \right)^{1/2} = \left(\langle f, f \rangle_2 \right)^{1/2}$$

Si può dimostrare che vale la DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

$$|\langle f, g\rangle_2| \le \|f\|_2 \|g\|_2$$ cioè

$$\left|\int_0^T f(t)\, g(t)\, dt\right| \le \sqrt{\int_0^T f(t)^2 dt}\ \sqrt{\int_0^T g(t)^2 dt}$$

per tutte le f, g con energia finita

Se usiamo le nozioni introdotte ora possiamo scrivere

$$\langle u_n, v_m\rangle_2 = 0 \qquad \forall n, m$$

$$\langle u_n, u_m\rangle_2 = 0 \qquad \forall n, m \text{ con } n \ne m$$

$$\langle v_n, v_m\rangle_2 = 0 \qquad \forall n, m \text{ con } n \ne m$$

$$\|u_n\|_2 = \|v_n\|_2 = \sqrt{\frac{T}{2}} \qquad \forall n \ge 1$$

$$\|u_0\|_2 = \sqrt{T}$$

Se immaginiamo u_n e v_n come elementi di uno "spazio lineare a infinite dimensioni" e pensiamo a $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ come un prodotto scalare nel senso usuale, vediamo che le funzioni

u_n e v_n sono una famiglia ortogonale nello spazio (L^2) delle funzioni a energia finita

Se invece di u_n / v_n prendessimo $\hat{u}_n$, $\hat{v}_n$, dove

$$\hat{u}_0 = \frac{u_0}{\sqrt{T}}, \quad \hat{u}_n = \frac{u_n}{\sqrt{T/2}}, \quad \hat{v}_n = \frac{v_n}{\sqrt{T/2}}$$

le $\hat{u}_n$, $\hat{v}_n$ sarebbero ORTONORMALI (ortogonali e tutte di lunghezza 1)

Dato allora una generica f (di energia finita) i suoi coeff. di Fourier si possono scrivere

$$a_0 = \frac{\langle f, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2}$$

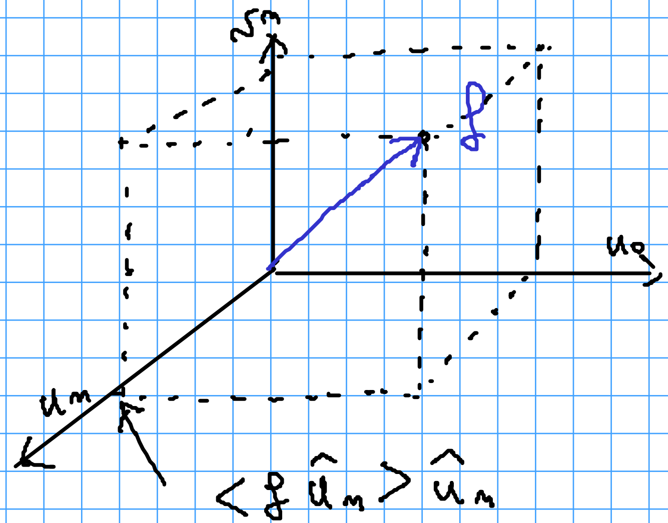
$$a_n = \frac{\langle f, u_n \rangle}{\|u_n\|^2}, \quad b_n = \frac{\langle f, v_n \rangle}{\|v_n\|^2}$$

e la serie di Fourier come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\langle f, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\rangle \frac{u_n}{\|u_n\|} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

$$\left(= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \hat{u}_n \rangle \hat{u}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \hat{v}_n \rangle \hat{v}_n \right)$$

Questa espressione corrisponde a trovare le "COORDINATE DI f" rispetto alla base degli $\{u_n, v_n\}$ (o $\{\hat{u}_n, \hat{v}_n\}$)



Con questa interpretazione non è sorprendente che valga la seguente formula:

EGUAGLIANZA DI PARCEVAL

$$\int_0^T f^2(t)\,dt = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

che corrisponde a dire che

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left\langle f_n, \frac{u_n}{\|u_n\|_2} \right\rangle_2 \frac{u_n}{\|u_n\|_2} \right\|_2^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \left\langle f_n, \frac{v_n}{\|u_n\|_2} \right\rangle_2 \frac{v_n}{\|u_n\|_2} \right\|_2^2$$

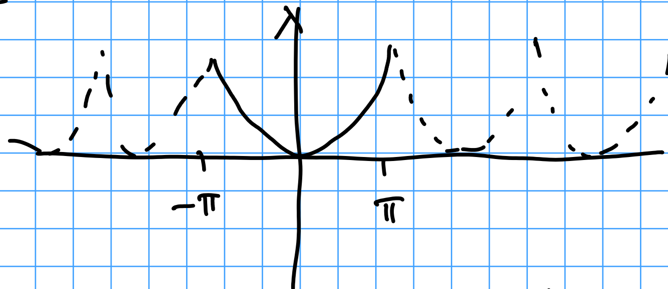
(COME SI VEDE SUBITO), cioè la somma dei quadrati delle norme delle componenti di f è uguale alla norma al quadrato di f (TEOREMA DI PITAGORA!!). Naturalmente questa formula andrebbe dimostrata (non lo facciamo) dato che c'è una serie e non una somma finita

L'uguaglianza si può anche scrivere:

$$(P) \qquad \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

<u>ESEMPIO</u> $T = 2\pi$, $\omega = 1$ e

$f(t) = t^2$ se $-\pi \le t \le \pi$



Chiaramente f è pari $\Rightarrow$ $b_n = 0$ $\forall n$; inoltre

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

mentre se $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt) = \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{\pi}\underbrace{\left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} 2t\sin(nt)\,dt = \text{(per parti)}$$

$$-\frac{4}{n\pi}\left[t\left(\frac{-\cos(nt)}{n}\right)\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{4\cancel{\pi}}{n^2\cancel{\pi}}\cos(n\pi) - \frac{4}{n^2\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

DUNQUE

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)\,dt$$

e la convergenza è uniforme dato che $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$

Se mettiamo $t=0$ nella formula sopra troviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$