Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 42, 18 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Serie di Fourier: Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T periodica, posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e definiti

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \\ a_n &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \\ b_n &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt \end{aligned}}$$

e per $n \geq 1$

chiamo "Serie di Fourier" di f la serie

$$(F) \qquad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

<u>TEOREMA</u> Se f è regolare a tratti $\Rightarrow$ La serie di F converge per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ (CONVERGENZA PUNTUALE) al valore

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

(dunque nei punti in cui f è continua, converge a $f(t_0)$)

NOTIAMO per definire (F) basta che f sia integrabile su $[0,T]$ (cioè per definire a_n e b_n)

anche in senso improprio, perché gli a_n e i b_n sono ottenuti integrando il prodotto $f(t) \cdot$ $\begin{cases} \sin(n\omega t) \\ \cos(n\omega t) \end{cases}$ e il secondo fattore è una funzione continua e limitata

DUNQUE GLI a_n / b_n HANNO SENSO se f è integrabile.

QUELLO CHE NON È CHIARO (e in generale può essere falso)

È se la serie in (F) converge alla $f(t)$ in tale. (se f non è regolare a tratti)

PERÒ VALE

TEOREMA Se f è integrabile e se gli a_n / b_n costruiti in (F) sono tutti nulli

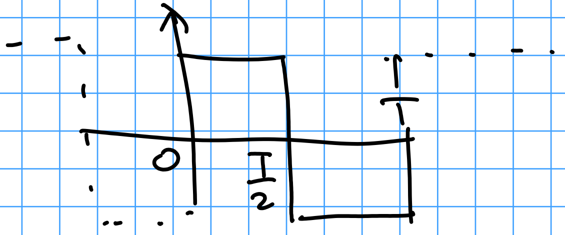
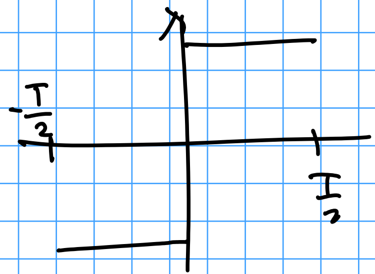
$$\Rightarrow \int_0^T |f(t)|\,dt = 0$$

$\Leftrightarrow$ f è nulla (a parte "pochi" punti)

non approfondisco il significato di "pochi"

Questo teorema dice che, anche se non so a cosa converge la serie di Fourier, "la sua somma è unica"

VEDIAMO DEGLI ESEMPI (ONDA QUADRA)

$f(t) =$  $\longleftrightarrow$ 

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < T/2 \\ -1 & \text{se } -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$

(non dico cosa fa in $-\frac{T}{2}, 0, \frac{T}{2}$, tanto non serve)

(e "replicata" in modo da esser T periodica)

Se voglio la posso mettere zero in $-\frac{T}{2}, 0, \frac{T}{2}$ (e tutti i multipli)

dato che, per il teorema di prima, la serie di F. converge a $f(t)$ se $t \neq \pm\frac{T}{2}, 0$ e converge a zero in $\pm\frac{T}{2}, 0$

- Dato che f è dispari $a_n = 0 \quad \forall n$

- Vediamo i b_n. Applicando la formula:

$$\frac{T}{2} b_n = \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt =$$

$$2\int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt \quad \text{(perché l'integrando è pari)}$$

$$= 2\int_0^{T/2} \sin(n\omega t)\, dt \qquad (f(t)=1 \text{ tra } 0 \text{ e } T/2)$$

$$= 2\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} = -\frac{2}{n}\frac{T}{2\pi}\left(\cos\left(n\omega\frac{T}{2}\right) - \cos(0)\right) =$$

$$-\frac{T}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = -\frac{T}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ \dfrac{4}{n\pi} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

CIOÈ LA SERIE DI f si può scrivere (mettendo $n = 2k+1$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)\omega t)$$

Se per esempio $T = 2\pi$ viene $\omega = 1$ e

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)t) \qquad (\star)$$

Se non sapessi da dove viene questa serie non riuscirei a dire che converge con gli strumenti per lo studio della convergenza visti ad analisi 1: LA CONV. ASS. NON FUNZIONA - il crit. di Leibniz funziona solo per t speciali.

Se metto $t = \frac{\pi}{2}$ trovo

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

dato che:

$$\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(k\pi)}_{=0}$$

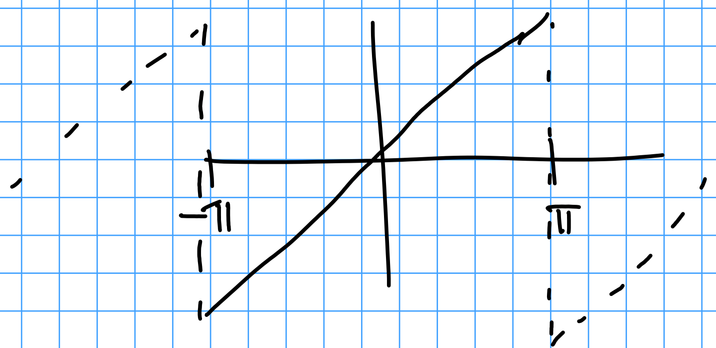
IN QUESTO CASO HO TROVATO LA SOMMA

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

(Avrei potuto dire che la serie conv. per Leibniz)

CHIARAMENTE LA CONVERGENZA DELLA SERIE IN (*) NON È UNIFORME DATO CHE f NON È CONTINUA.

<u>ALTRO ESEMPIO</u> $T = 2\pi$ $(\Rightarrow \omega = 1)$



$f(t) = t$ per $-\pi < t < \pi$

("periodicizzata" su tutto $\mathbb{R}$, di per. 2π)

(DENTE DI SEGA) Anche in questo caso f <u>NON</u> è continua su $\mathbb{R}$ e quindi non potrà avere la conv. unif.

Cerchiamo i coeff. di Fourier per questa f.

Anche questa f è dispari $\Rightarrow$ $a_n = 0$, e

$$b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt) \underset{\text{perché l'integrando è pari}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\,dt =$$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}\,\frac{-\cos(n\pi)}{n} - 0 + \frac{2}{n\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{-2(-1)^n}{n}$$ DUNQUE

$$f(t) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)$$ se $t \neq$

SE metto $t = \frac{\pi}{2}$ TROVO

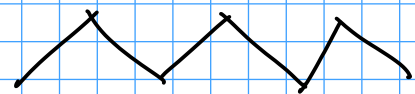
$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(n\pi/2) = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}(-1)^k$$

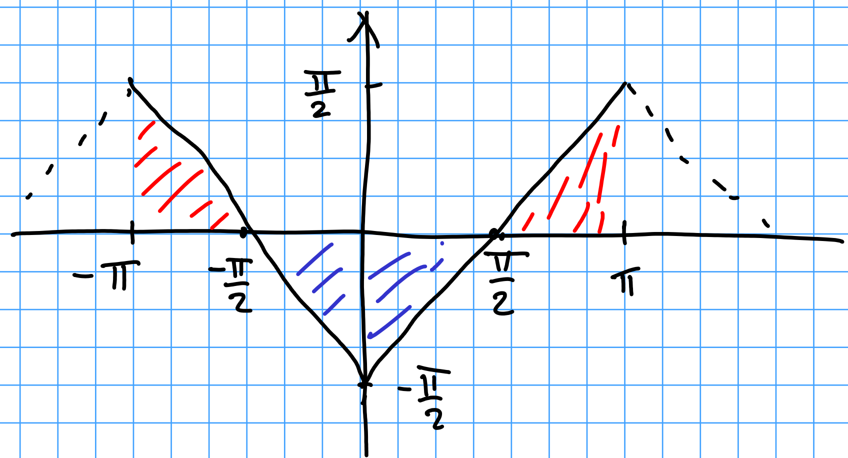
$$\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}\right)$$

$$= -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1\,(-1)^k}{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \left((-1)^{2k+1} = (-1)^{2k}\cdot(-1) = -1\right)$$

Ritrovo $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

TERZO ESEMPIO (ONDA TRIANGOLARE)





$T = 2\pi,\ \omega = 1$

$$f(t) = \begin{cases} t - \frac{\pi}{2} & \text{se } 0 \le t \le \pi \\ -t - \frac{\pi}{2} & \text{se } -\pi \le t \le 0 \end{cases}$$

$$= |t| - \frac{\pi}{2}$$

QUESTA È PARI $\Rightarrow$ $b_n = 0$. $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0$

se $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos(nt)\, dt = \text{per parti}$$

$$\underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0 \ (\sin(n\pi) = 0 \ \forall n)} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt =$$

$$-\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ PARI} \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)t) \qquad (\ast\ast)$$

NOTA CHE, fissato t, il termine generale: $\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$

si maggiora IN MODULO CON $\frac{1}{(2k+1)^2}$ $\Rightarrow$ se t è fissato la serie è A.C. ANZI

$$M_k = \max_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2} \right| = \frac{1}{(2k+1)^2} \quad e \quad \sum_{k=0}^{\infty} M_k < +\infty$$

$\Rightarrow$ La serie in (**) è TOTALMENTE CONVERGENTE

$\Rightarrow$ La serie converge uniformemente a $f(t)$

IDEA Maggiore regolarità di f $\longrightarrow$ Maggiore sommabilità dei coeff. (a_n), (b_n)

Migliore convergenza a f $\longleftarrow$

Se mettiamo $t=0$ in (**) troviamo

$$-\frac{\pi}{2} = f(0) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\cdot 0)$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

TEOREMA (NON OTTIMALE) Se f HA DERIVATA I^a CONTINUA $\Rightarrow$ la serie di Fourier converge uniformemente.

Dim. Dalle formule di rilievo: per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{T}\underbrace{\left[f(t)\frac{\sin(n\omega t)}{\omega n}\right]_0^T}_{=0 \text{ perché } f(t)\sin(n\omega t) \text{ è } T \text{ periodica}} - \frac{2}{Tn\omega}\int_0^T f'(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

= altra integrazione per parti

$$- \frac{2}{Tn\omega}\left[f'(t)\frac{-\cos(n\omega t)}{n}\right]_0^T - \frac{2}{Tn^2\omega^2}\int_0^T f''(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

=0 perché $f'(t)\sin(n\omega t)$ è T periodica

$$\Rightarrow \quad a_n = -\frac{2}{T\omega^2}\frac{1}{n^2}\int_0^T f''(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| \leq \underbrace{\frac{2}{T\omega^2}\int_0^T |f''(t)|\,dt}_{c} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{c}{n^2}$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$. NELLO STESSO MODO TROVO $\sum |b_n| < +\infty$

DATO CHE

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |a_n \cos(n\omega t)| \leq |a_n| \qquad \max_{t\in\mathbb{R}} |b_n \sin(n\omega t)| \leq |b_n|$$

$\Rightarrow \sum a_n \cos(n\omega t)$ e $\sum b_n \sin(n\omega)$ sono TOTALMENTE CONVERG.

$\Downarrow$

CONV. UNIF. A $f(t)$

(SI CONFERMA L'IDEA PIÙ REGOLARITÀ DI $f \rightarrow$ MAGGIORE SOMMABILITÀ DEI COEFF. $\rightarrow$ MIGLIORE CONVERGENZA DELLA SERIE)

QUESTO DISCORSO SI PUÒ FARE A PRESCINDERE DA f.

<u>TEOREMA</u> Date due successioni di numeri $(a_n)_{n\geq 0}$ $(b_n)_{n\geq 0}$

CONSIDERIAMO LA SERIE (DI FOURIER)

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

(T è finito e $\omega = 2\pi/T$). ALLORA.

(a) Se $\sum_n |a_n| < +\infty$ $\sum_n |b_n| < +\infty$ $\Rightarrow$

La serie $\sum_n a_n \cos(n\omega t) + \sum_n b_n \sin(n\omega t)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A UNA SOMMA $S(t)$. TALE $S(t)$ è T-periodica e continua in T. INOLTRE

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,dt \quad \text{e per } n \geq 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

(b) Se (IN PIÙ) $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ ANCHE LA SERIE DELLE DERIVATE CONVERGE UNIF. E DUNQUE LA SOMMA $S(t)$ è DERIVABILE e si HA:

$$S'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n n\omega \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\omega \cos(n\omega t)$$