Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 41, 17 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

EQ. di Legendre: (dato $p \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} (1-x^2)\, y'' - 2x y' + p(p+1)\, y = 0 \\ y(0) = A \qquad y'(0) = B \end{cases} \qquad -1 < x < 1$$

Abbiamo visto che, se cerco $y(x)$ del tipo:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{2n+1}$$

trovo delle "relazioni ricorsive" per u_n e v_n:

(1) $$u_{n+1} = u_n \frac{(2n+1-p)(2n+2+p)}{(2n+2)(2n+3)} \qquad u_0 = B$$

(2) $$v_{n+1} = v_n \frac{(2n-p)(2n+1+p)}{(2n+1)(2n+2)} \qquad v_0 = A$$

Se trovo $\underline{\hat{u}_n}$ e $\underline{\hat{v}_n}$ mediante le relazioni sopra con

$A = B = 1$ $\Rightarrow$ la sol. generale sarà

$$y(x) = A \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\hat{v}_n x^{2n}}_{v(x)} + B \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\hat{u}_n x^{2n+1}}_{u(x)}$$

"Torno" con la teoria delle eq. lineari omogenee di ordine 2, per cui la sol. generale è combinazione lineare di 2 "sol. fondam."

NEL CASO in cui p è un intero $\nearrow p = 2K$ (p pari), $\searrow p = 2K+1$ (p dispari)

<u>p pari</u>: dalla (2) si vede che $v_{K+1} = 0$

$\Rightarrow \quad v_n = 0 \quad \forall\, n \geq K+1$

DUNQUE $v(x)$ è un polinomio di grado $2K = p$ (avente tutte potenze pari)

<u>p dispari</u> dalla (1) si vede che $u_{K+1} = 0 \Rightarrow u_n = 0 \quad \forall n \geq K+1$

CIOE' $u(x)$ è un pol di grado $2K+1 = p$, avente solo potenze dispari

<u>DEF.</u> Dato $p \in \mathbb{N}$ poniamo

$$L_p(x) = \begin{cases} A_p\, v(x) & \text{se } p \text{ pari} \\ B_p\, u(x) & \text{se } p \text{ dispari} \end{cases}$$

Polinomio p-esimo di Legendre

Dove A_p e B_p sono delle opportune costanti tali che

$$L_p(1) = 1 \qquad \left(\text{Noto che} \quad L_p(-x) = \begin{cases} L_p(x) & p \text{ pari} \\ -L_p(x) & \text{se } p \text{ dispari} \end{cases} \right)$$

PROPRIETÀ ("ortogonalità")

$$n \neq m \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} L_n(x)\, L_m(x)\, dx = 0$$

Questa proprietà si ricava dall'equazione differenziale di partenza (di cui L_p sono particolari soluzioni)

L'eq. diff. era

$$\underbrace{(1-x^2)\, y'' - 2x\, y'}\ + p(p+1)\, y = 0$$

$$\left((1-x^2)\, y' \right)' + p(p+1)\, y = 0$$

DUNQUE

$$(*) \qquad \left((1-x^2)\, L_n' \right)' + n(n+1)\, L_n = 0$$

$$(**) \qquad \left((1-x^2)\, L_m' \right)' + m(m+1)\, L_m = 0$$

Moltiplico $\ell_n(x)$ per L_m e integro su $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1}\left((1-x)^2 L_n'(x)\right)' L_m(x)dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\,dx = 0$$

$\Downarrow$

INTEGRO PER PARTI

$$\underbrace{\left[(1-x^2) L_m'(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(1-x^2) L_m'(x) L_m'(x)\,dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\,dx = 0$$

$\Downarrow$

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\,dx = \frac{1}{m(m+1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2) L_n'(x) L_m'(x)\,dx$$

Se moltiplico $\ell_m(x)$ per L_m e integro ...

$$\int_{1}^{1} L_m(x) L_m(x)\,dx = \frac{1}{m(m+1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2) L_m'(x) L_m'(x)\,dx$$

Se $\frac{1}{m(m+1)} \neq \frac{1}{m(m+1)}$ necessariamente:

$$\int_{-1}^{1} L_m(x) L_m(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) L_m'(x) L_m'(x)\,dx = 0.$$

Serie di Fourier:

Fissiamo $T > 0$ (periodo) e consideriamo una funzione $f(t)$, definita su tutto $\mathbb{R}$ e T-periodica, cioè

$$f(t+T) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tra le funzioni periodiche ci sono le funzioni (trigonometriche)

$$\boxed{t \mapsto \cos(n \omega t) \qquad t \mapsto \sin(n\omega t)}$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ($\omega \to$ velocità angolare)

(dato che le funzioni scritte sopra hanno periodo $\frac{T}{n}$ (che è il minimo periodo) e dunque hanno anche periodo T)

IDEA ogni f T periodica si può scrivere come

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n \omega t) \qquad (\star)$$

Vedremo se, e in che senso, vale l'eguaglianza (✩)

DISCORSO "EURISTICO" Supponiamo che (✩) valga e

tutto funzioni — vediamo di ricavare i coeff. a_n e b_n

Fissiamo $K \in \mathbb{N}$, prendiamo l'eguaglianza (✩), moltiplichiamo per $\cos(K\omega t)$ e integriamo su $[0, T]$

$$\int_0^T f(t)\cos(K\omega t)\,dt = \int_0^T \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)\cos(K\omega t)\,dt$$

= (supponendo che si possa fare ...)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \int_0^T \cos(n\omega t)\cos(K\omega t)\,dt + b_n \int_0^T \sin(n\omega t)\cos(K\omega t)\,dt\right)$$

CALCOLIAMO QUESTI INTEGRALI: comincio dal II° $(n \geq 1)$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(K\omega t)\,dt \;=\; \text{per parti}$$

$$\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\cos(K\omega t)\right]_0^T - \int_0^T \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} K\omega\left(-\sin(K\omega t)\right)dt$$

↑

vale zero dato che la funzione (T)

seno è T periodica e quindi

la sua differenza tra T e 0 vale zero!

$$\frac{k}{m}\int_0^T \cos(m\omega t)\sin(k\omega t)\,dt$$

$$= (\text{ancora per parti}) = \underbrace{\left[\frac{k}{m}\,\frac{\sin(m\omega t)\sin(k\omega t)}{m\omega}\right]_0^T}_{0\ (\text{come prima})} - \frac{k^2}{m^2}\int_0^T \sin(m\omega t)\cos(k\omega t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{k^2}{m^2}\right)\int_0^T \sin(m\omega t)\cos(k\omega t)\,dt = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^T \sin(m\omega t)\cos(k\omega t)\,dt = 0 \quad \forall\, m, k \in \mathbb{N}}$$

sono funzioni "ortogonali"

Vediamo il I° integrale

$$\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(k\omega t)\,dt$$

Se $k=0$ $\int_0^T \cos(m\omega t) =$

$\nearrow$ $\left[\frac{\sin(m\omega t)}{m\omega}\right]_0^T = \sin(2n\pi) = 0$ se $m \geq 1$

$\searrow$ $\int_0^T 1\,dt = T$ $m=0$

$K \geq 1 \quad \int_0^T \cos(m\omega t)\cos(K\omega t)\, dt \quad = \quad$ (per parti)

$$\Big[\underbrace{\cos(m\omega t) \frac{\sin(K\omega t)}{K\omega}}_{0} \Big]_0^T + \int_0^T \frac{m\cancel{\omega}}{K\cancel{\omega}} \sin(m\omega t)\sin(K\omega t)\, dt =$$

$$\frac{m}{K} \Big[\underbrace{\sin(m\omega t)\frac{(-\cos(K\omega t))}{K\omega}}_{0} \Big]_0^T + \frac{m^2}{K^2}\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(K\omega t)\, dt$$

DUNQUE $\quad \left(1 - \frac{m^2}{K^2}\right) \int_0^T \cos(m\omega t)\cos(K\omega t)\, dt = 0$

DA CUI

$$\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(K\omega t)\, dt = 0 \qquad \text{se } m \neq K$$

Se $m = K$ devo ragionare in modo diverso $\Rightarrow$

$$\int_0^T \cos^2(K\omega t)\, dt = \int_0^T \frac{\cos(2K\omega t) + 1}{2}\, dt =$$

$$\Big[\underbrace{\frac{\sin(2K\omega t)}{4K}}_{0} \Big]_0^T + \frac{T}{2} = \frac{T}{2}$$

$$\boxed{\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(k\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ T & \text{se } m = k = 0 \\ \frac{T}{2} & \text{se } m = k \neq 0 \end{cases}}$$

Con gli stessi calcoli si vede che

$$\boxed{\int_0^T \sin(m\omega T)\sin(k\omega T)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ \frac{T}{2} & \text{se } m = k \end{cases}}$$

Tornando al calcolo che stavamo facendo, vediamo che

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t) = a_k \begin{cases} T & \text{se } k=0 \\ T/2 & k \geq 1 \end{cases}$$

dato che tutti i termini con $\sin(m\omega t)\cos(k\omega t)$ sono nulli e tutti quelli con $\cos(m\omega t)\cos(k\omega t)$ PURE, se $m \neq k$ (se $m = k$ trovo $T/2$)

CIOE' (se tutto funziona)

$$(A) \quad \boxed{a_K = \begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt & \text{per } K=0 \\ \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(K\omega t)\,dt \end{cases}}$$

Se si moltiplica (☆) per $\sin(K\omega t)$ e si rifà tutto $\Rightarrow$

$$(B) \quad \boxed{b_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(K\omega t)\,dt} \qquad (K \geq 1)$$

Dunque quello che devo cercare di dim. è la formula

$$(☆) \quad f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)$$

dove a_m e b_m sono quelli scritti sopra (COEFFICIENTI DI FOURIER DI f).

<u>OSS.</u> (a) Nelle formule (A) e (B) si può integrare su un qualunque intervallo $[a,b]$ tale che $b-a=T$

(si può vedere con un calcolo - sfruttando il fatto che gli integrandi sono T - periodici)

(b) Se f è pari $\Rightarrow$ $b_n = 0$ $\forall n$ - Infatti

$$\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt \underset{\text{punto (a)}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)\sin(n\omega t)}_{\text{FUNZIONE DISPARI}}\,dt =$$

$$\int_{-T/2}^{0} \underset{\text{cambio di variabile } t=-\tau}{f(t)\sin(n\omega t)}\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt =$$

$$\int_{T/2}^{0} \underset{f(\tau)\ (f \text{ è pari})}{f(-\tau)}\sin(-n\omega\tau)(-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt =$$

$$-\int_0^{T/2} f(\tau)\sin(n\omega\tau)\,d\tau + \int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = 0$$

(c) Se f dispari $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n$

TEOREMA Se f è "REGOLARE A TRATTI" $\Rightarrow$

La serie di Fourier costruita a partire da f

CONVERGE PUNTUALMENTE IN OGNI t_0 e la

somma è uguale a

$$\sum (\_ \ \_) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

dove indico $f(t_0^+) = \lim_{t \to t_0^+} f(t)$

$$f(t_0^-) = \lim_{t \to t_0^-} f(t)$$

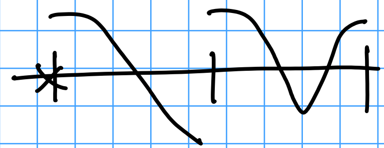
Ho usato la def.

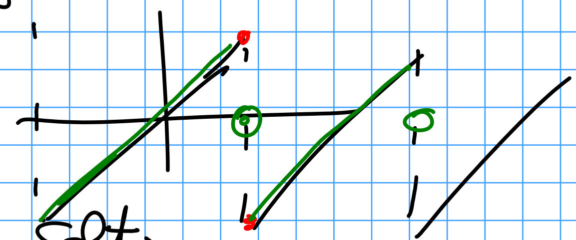
DEF. f si dice REGOLARE A TRATTI se esistono

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$ t.c. che

f è continua e derivabile, con derivata continua su ogni

$[t_i, t_{i+1}]$





$\Rightarrow$ (si dimostra) $\forall$ nei punti t_i può essere una discontinuità di salto

(e il salto è $f(t_0^+) - f(t_0^-)$)