Stavolta il polo $z = 0$ è doppio e il residuo da calcolare è pari ad $h'(0)$; tale valore si trova subito usando i calcoli dell'esempio precedente: $h'(0) = ia - \pi i$, da cui

$$(v.p.) \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{e^{ina}}{n} = -h'(0) = -ia + i\pi. \qquad \forall a \in]0, 2\pi].$$

Notiamo che

$$(v.p.) \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{e^{ina}}{n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}, 0<|n|\leq k} \frac{e^{ina}}{n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{e^{ian}}{n} + \frac{e^{-ian}}{-n} \right) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an)}{n},$$

da cui la relazione precedente diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an)}{n} = \frac{\pi - a}{2} \qquad \forall a \in]0, 2\pi[.$$

3.7 Serie di potenze nella soluzione di equazioni differenziali ai dati iniziali

Vediamo un esempio di applicazione delle serie di potenze alla soluzione di problemi differenziali ai dati iniziali. Supponiamo di avere un'equazione del secondo ordine

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f \\ y(0) = A, y'(0) = B \end{cases} \tag{3.15}$$

dove a, b, c sono numeri reali con $a \neq 0$, A, B sono due *dati iniziali* assegnati in $\mathbb{R}$ e dove $f(x)$ è una funzione assegnata che supponiamo sviluppabile in serie di potenze in un intervallo centrato nell'origine (sarebbe lo stesso se l'origine fosse sostituita da un arbitrario x_0 in $\mathbb{R}$). Quest'ultima proprietà significa che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad \text{per } -R < x < R$$

con $R > 0$, per un'opportuna successione (f_n). L'idea spontanea è di cercare la soluzione y della forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \tag{3.16}$$

per degli opportuni coefficienti y_n, sperando che tali coefficienti si riescano a trovare e che la serie (3.16) sia convergente. Per trovare gli y_n possiamo ragionare come segue – ammettiamo che la serie (3.16) converga su $]r, r[$ per un qualche $r > 0$; allora per le proprietà delle serie di potenze si ha che y è infinitamente derivabile in $]-r, r[$ e

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}(n+1)x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2}(n+1)(n+2)x^n$$

che inseriti nell'equazione (3.15):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(ay_{n+2}(n+1)(n+2) + by_{n+1}(n+1) + cy_n\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Se ne ricava da (3.4):

$$a y_{n+2}(n+1)(n+2) + b y_{n+1}(n+1) + c y_n = f_n \qquad \forall n \tag{3.17}$$

Notiamo inoltre che

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1$$

e quindi la successione (y_n) deve verificare la *condizione ricorsiva* (3.17) unitamente alle condizioni $y_0 = A$, $y_1 = B$. È facile convincersi che queste condizioni individuano **una e una sola** successione (y_n). Si può inoltre dimostrare, con un po' di pazienza che la serie di potenze risultante da tale successione ha raggio di convergenza **maggiore o eguale** al numero R in cui converge la serie relativa a f e dunque, ragionando a rovescio, la y così costruita risolve effettivamente l'equazione (3.15) nell'intervallo $]-R, R[$.

Una caratteristica interessante di questo metodo è che è assai facile calcolare i coefficienti y_n usando la formula ricorsiva (ammesso naturalmente che.si conoscano gli f_n).

Abbiamo considerato sopra un esempio abbastanza elementare, in cui in realtà, a causa dei coefficienti costanti si può dire molto di più con la teoria "elementare". In realtà si potrebbe dimostrare un teorema più generale

3.7.1 Teorema. *Consideriamo l'equazione differenziale* (3.15) *con a, b, c ed f funzioni di x sviluppabili in serie di potenze in un intervallo simmetrico centrato in zero:*

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad \text{per } |x| < R$$

e supponiamo che $a(x) \neq 0$ per $|x| < R$. Allora la soluzione y è sviluppabile in potenze nell'intervallo $]-R, R[$.

Il teorema precedente ci permette di studiare le proprietà delle soluzione di equazioni per cui non è possibile trovare esplicitamente la soluzione.

3.7.2 Esempio (Equazione di Legendre)**.** Consideriamo il problema

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \\ y(0) = A, y'(0) = B \end{cases} \tag{3.18}$$

dove p è un parametro assegnato (e A, B sono assegnati in $\mathbb{R}$). In virtù del teorema precedente possiamo scrivere

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \qquad \text{per } -1 < x < 1 \tag{3.19}$$

Ripetendo i calcoli fatti nel primo esempio possiamo ricavare y' e y'' – moltiplicando y'' per $1 - x^2$ otteniamo

$$(1-x^2)y'' = (1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1)x^n =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} y_n n(n-1)x^n$$

(nella prima serie abbiamo "scalato" di due l'indice, nella seconda aggiunto i primi due termini che comunque fanno zero). Analogamente

$$2xy' = 2x\sum_{n=1}^{\infty} y_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2y_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2y_n n x^n.$$

Mettendo tutto nell'equazione:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(y_{n+2}(n+2)(n+1) - y_n n(n-1) - 2y_n n + p(p+1)y_n\right) x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(y_{n+2}(n+2)(n+1) - y_n \left(n^2 + n - p^2 - p\right)\right) x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(y_{n+2}(n+2)(n+1) - y_n(n-p)(n+p+1)\right) x^n$$

da cui ricaviamo la relazione ricorsiva

$$y_{n+2} = \frac{(n-p)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)} y_n \qquad y_0 = A, y_1 = B \tag{3.20}$$

Notiamo che nella formula sopra manca y_{n+1} quindi, se per esempio n è pari il valore di y_n dipende solo dal valore di y_{n-2} che è il termine pari precedente e la stessa cosa vale per i termini dispari.

Possiamo esprimere matematicamente questo fatto ponendo $u_n := y_{2n}$, $v_n := y_{2n+1}$. Allora

$$u_{n+1} = y_{2n+2} = \frac{(2n-p)(2n+p+1)}{(2n+2)(2n+1)} y_{2n} = \frac{(2n-p)(2n+p+1)}{(2n+2)(2n+1)} u_n$$

e quindi (u_n) verifica

$$u_{n+1} = \frac{(2n-p)(2n+1+p)}{(2n+2)(2n+1)} u_n, \qquad u_0 = A \tag{3.21}$$

e analogamente

$$v_{n+1} = y_{2n+3} = \frac{(2n+1-p)(2n+1+p+1)}{(2n+1+2)(2n+1+1)} y_{2n+1} = \frac{(2n+1-p)(2n+p+2)}{(2n+3)(2n+2)} v_n$$

da cui

$$v_{n+1} = \frac{(2n+1-p)(2n+2+p)}{(2n+3)(2n+2)} v_n, \qquad v_0 = B. \tag{3.22}$$

Se indichiamo con $(\bar{u}_n)_n$ la successione prodotta da (3.21) con $A = 1$ e condizione $(\bar{v}_n)_n$ la successione prodotta da (3.22) con $B = 1$, allora la soluzione generale y risulta definita da $y(x) = A\bar{u}(x) + B\bar{v}(x)$ dove

$$\bar{u}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_n x^{2n}, \quad \bar{v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_n x^{2n+1}, \qquad \text{per } |x| < 1.$$

La funzione $\bar{u}$ (pari) e la funzione $\bar{v}$ (dispari) sono le soluzioni dell'equazione (3.18) con condizioni iniziali $\bar{u}(0) = 1$, $\bar{u}'(0) = 0$ e $\bar{v}(0) = 0$, $\bar{v}'(0) = 1$, rispettivamente.

3.7.3 Osservazione. Ci siamo "fidati" del teorema (3.7.1) per dire che i coefficienti $(u_n)_n$ e i $(v_n)_n$ definiscono delle serie di potenze con raggio di convergenza 1. Potremmo in realtà vedere facilmente questa proprietà usando il criterio del rapporto. Per esempio nel caso degli u_n (che sono evidentememte positivi se $A > 0$), dalla (3.21) si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\bar{u}_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-p)(2n+1+p)}{(2n+2)(2n+1)} = 1.$$

Supponiamo ora che p sia un intero positivo pari, diciamo $p = 2k$. Allora guardando la (3.21) si vede che il lato destro dell'eguaglianza diventa zero per $n = k$. Ne segue che gli u_n fanno zero per $n \geq k+1$. In altre parole u è un polinomio di grado $2k = p$. Analogamente se $p = 2k+1$ è un intero dispari si vede dalla (3.22) che tutti i v_n sono nulli per $n \geq k+1$ e quindi v è un polinomio di grado $2k+1 = p$.

3.7.4 Definizione. Dato p intero si chiama *polinomio di Legendre* di ordine p il polinomio $L_p(x)$ definito da:

$$L_p(x) = A_k \sum_{n=0}^{k} \bar{u}_n x^{2n} \text{ se } p = 2k, \qquad L_p(x) = B_k \sum_{n=0}^{k} \bar{v}_n x^{2n+1} \text{ se } p = 2k+1,$$

dove A_k e B_k sono dei fattori di normalizzazione scelti in modo che $L_p(1) = 1$.

I polinomi di Legendre sono utilizzati nella risoluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono il campo gravitazionale (o il campo elettrostatico) in condizioni di simmetria sferica. Una loro importante proprietà è la seguente "ortogonalità".

3.7.5 Osservazione. Siano n ed m interi. Allora

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0 \qquad \text{se } n \neq m. \tag{3.23}$$

Per vederlo notiamo che l'equazione di Legendre si può scrivere:

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0$$

Mettendo L_n al posto di y, moltiplicando per L_m e integrando tra -1 e 1

$$0 = \int_{-1}^{1} ((1-x^2)L_n'(x))' L_m(x)\, dx + n(n+1) \int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\, dx =$$
$$\underbrace{\left[(1-x^2)L_n'(x)L_m(x)\right]_{x=-1}^{x=1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} (1-x^2) L_n'(x) L_m'(x)\, dx + n(n+1) \int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\, dx$$

(abbiamo integrato per parti il primo termine). Ne segue:

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\, dx = \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^{1} (1-x^2) L_n'(x) L_m'(x)\, dx.$$

Scambiando n con m otteniamo anche

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\, dx = \frac{1}{m(m+1)} \int_{-1}^{1} (1-x^2) L_n'(x) L_m'(x)\, dx.$$

e siccome $n \neq m$ l'unica possibilità è che

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2) L_n'(x) L_m'(x)\, dx = 0$$