Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 39, 11 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Serie di potenze (cont.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{RICORDO CHE} \quad \text{se} \quad L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{e} \quad R = \frac{1}{L}$$

allora la serie converge (TOTALMENTE e quindi) uniformemente

su ogni $[-R', R']$ con $R' < R$, DA CUI

- $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è continua in $]-R, R[$
- $S(x)$ è derivabile infinite volte su $]-R, R[$ e

$$S^{(k)}(x) = \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}}$$

(è un'altra serie di potenze, avente lo stesso R)

OSS. Si può rifare tutto per le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ è fissato. Allora invece di $]-R, R[$ devo scrivere $]x_0 - R, x_0 + R[$

ABBIAMO VISTO CHE

$$S^{(k)}(0) = a_k\, k! \qquad \left(S^{(k)}(x_0) = a_k\, k! \right)$$

dunque gli a_k sono i coeff. di Taylor di S.

DOMANDA Data una $f(x)$ definita vicino a un pto x_0, derivabile infinite volte, posto $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

POSSO DIRE CHE $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

(per le x in cui f è definita? / per le x vicine a x_0)

IN GENERALE LA RISPOSTA È NO.

CONTROESEMPIO: costruisco una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

- $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \quad \left(\Rightarrow \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \text{ se } x \neq 0 \right)$
- $f(x) \neq 0 \quad$ se $x \neq 0$

UNA TALE FUNZIONE NON PUÒ ESSERE SOMMA DELLA SUA SERIE DI TAYLOR IN NESSUNA $x \neq 0$

Definisco f come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Facciamo alcuni calcoli:

(1) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \Rightarrow f$ è continua in zero

$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = \lim_{y \to +\infty} e^{-y} = 0 \quad \left(y = \frac{1}{x^2} \right)$$

(2) $$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)' = 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{y \to +\infty} 2e^{-y} y^{\frac{3}{2}} = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} - - - - = 0 \end{cases}$$

IN GENERALE SI PUÒ VERIFICARE CHE , se $x \neq 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

per opportuni polinomi $P(x)$, $Q(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f^{(k)}(x) = 0$$

<u>DUNQUE</u> $\quad f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$

$$\sim \quad f(x) = o(x^k) \quad \forall k$$

QUESTA FUNZIONE FA DA CONTROESEMPIO —
IN GENERALE NON POSSO RICOSTRUIRE $f(x)$ CONOSCENDO
TUTTE LE (INFINITE) DERIVATE $f^{(k)}(x_0)$

<u>DEFINIZIONE</u> (1) Dico che f è ANALITICA in un punto x_0

se $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad$ per x in un intorno di x_0

per un'opportuna (a_n)

$\Updownarrow$ (per quanto visto prima)

$$\circledast \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \text{per } x \text{ in un intorno di } x_0$$

② Dico che f è ANALITICA IN A aperto di $\mathbb{R}$ se f è analitica in ogni $x_0 \in A$

NOTA

f analitica $\Longrightarrow$ f infinitamente derivabile
$\not\Leftarrow$
la funzione di prima è infinitamente derivabile, ma non analitica in $x_0 = 0$

ESEMPI $\quad f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ è ANALITICA IN $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

quello che si vede subito è che $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad$ se $x \in]-1,1[$

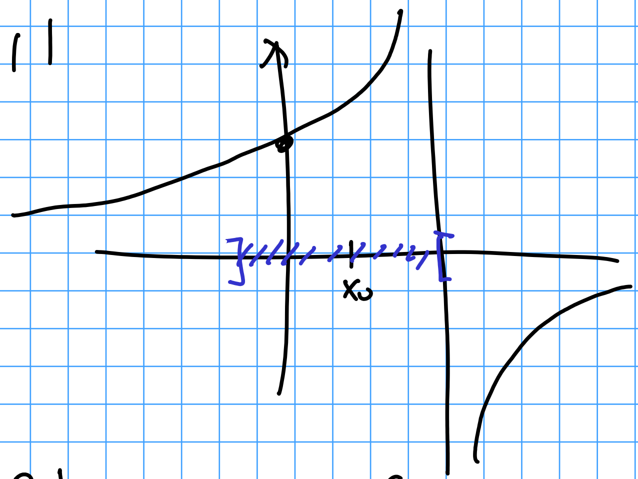
DUNQUE f è analitica in $x_0 = 0$

$f(x) =$ somma della sua serie di Taylor in $x_0 = 0$
per le x di $]-1,1[$, che è un intorno di zero.

Con un po' di calcoli si può verificare che, preso $x_0 \neq 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \text{nell'intervallo }]x_0 - R, x_0 + R[$$

dove $R = |x_0 - 1|$



$\Rightarrow \dfrac{1}{1-x}$ è analitica su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

ALTRE FUNZIONI ANALITICHE

- $f(x)$ = polinomio (in questo caso le serie hanno solo un numero finito di addendi)
- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($\leftarrow$ questo è lo sviluppo in $x_0 = 0$, ma lo si può rifare $\forall x_0$)
- $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $f(x)$ e $g(x)$ analitiche in x_0 $\Rightarrow$
  (o) $f+g$ analitica in x_0
  (i) $f(x) \cdot g(x)$ è analitica in x_0

(ii) $\frac{f(x)}{g(x)}$ è analitica, purché $g(x_0) \neq 0$

IDEA (caso $x_0 = 0$) so che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

per le x in $]-R, R[$ $\qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

- È chiaro che $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ (SOMMA OK)

- $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ DOVE (PRODOTTO ALLA CAUCHY DELLE SERIE)

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$\frac{1}{n!} (f \cdot g)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$$

- VEDIAMO $\frac{1}{g(x)}$ (Poi $\frac{f(x)}{g(x)}$ lo vedo come $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$)

sempre per $x_0 = 0$. So che $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ per $x \sim 0$

so anche che $g(0) = a_0 \neq 0$. Mettiamo in evidenza a_0

$$g(x) = a_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n \right) \quad \text{dove} \quad a'_n = \frac{a_n}{a_0} \Rightarrow a'_0 = 1$$

IDEA
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n x^n} \text{ " = " } \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a'_n x^n \right)^m (-1)^m$$

y

$$\left(\text{MI RICORDO CHE } \frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n \right)$$

SI RIESCE A SCRIVERE COME UN'UNICA SERIE

PER ES. x^2+1 è un polinomio $\Rightarrow$

$\frac{1}{x^2+1}$ è analitica, cioè $\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

per un'opportuna a_n, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

- Se f è analitica in x_0 e g è analitica in $y_0 = f(x_0)$ $\Rightarrow$ $g(f(x))$ è analitica in x_0

ESEMPI DI USO DELLE FUNZIONI ANALITICHE NELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ESEMPIO 1 $\begin{cases} y'' - y = e^x \\ y(0)=0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

È chiaro che il problema si può risolvere direttamente però uso un altro metodo - per far capire l'idea -

CERCO LA SOLUZIONE $y(x)$ del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \left(= y(x)\right)$

($y_n \in \mathbb{R}$ sono da trovare)

Se y è fatto così, (e se converge) $\Rightarrow$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, n \, x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} y_n \, n(n-1) \, x^{n-2}$$

INOLTRE SO CHE $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

SE IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE TROVO

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} y_n \, n(n-1) \, x^{n-2}} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leftarrow$$

RISCRIVO IL PRIMO ADDENDO, CAMBIANDO INDICI $m = n - 2$

$n = m + 2$

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_{m+2}(m+2)(m+1)x^m = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

TROVO ALLORA (IN "←")

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(y_{n+2}(n+2)(n+1) - y_n - \frac{1}{n!}\right)x^n = 0$$

$\Updownarrow$

(per la verità vale anche $\Downarrow$, ma è un teorema e qui non serve)

$$y_{n+2}(n+2)(n+1) - y_n - \frac{1}{n!} = 0 \quad \forall n \geq 0$$

↑

CONDIZIONE "RICORSIVA" sugli y_n

(R) $$y_{n+2} = \frac{\left(y_n + 1/n!\right)}{(n+1)(n+2)} \quad \forall n \geq 0$$

y_0 e y_1 possono essere assegnati ad arbitrio (perché valga l'equazione); da $n = 2$ in poi gli y_n sono UNIVOCAMENTE DETERMINATI DA (R)

Però, ricordando che $y_0 = y(0)$ e $y_1 = y'(0)$, ricaviamo

$$y_0 = y(0) = 0 \quad , \quad y_1 = y'(0) = 1$$

Notiamo che la (R) si scinde in due relazioni, una per i termini y_n con n pari, e una per i dispari.

PONIAMO $\quad u_n = y_{2n+1} \qquad v_n = y_{2n} \qquad (n \geq 0)$

$$v_0 = y_0 ,\ v_1 = y_2 ,\ v_3 = y_6 \ldots , \qquad u_0 = y_1 ,\ u_1 = y_3 ,\ u_2 = y_5 \ldots$$

Usando (R) otteniamo

$$v_{n+1} = y_{2(n+1)} = y_{2n+2} = \frac{y_{2n} + 1/(2n)!}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{v_n + 1/(2n)!}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$(R_1) \qquad v_{n+1} = \frac{v_n}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+2)!} \qquad \text{(termini pari)}$$

Analogamente

$$u_{n+1} = y_{2(n+1)+1} = y_{2n+3} = \frac{y_{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)!}}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{u_n + \frac{1}{(2n+1)!}}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$(R_2) \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+3)!} \qquad \text{(termini dispari)}$$

DA QUI IN POI SI POTREBBE TROVARE ESPLICITAMENTE

u_m e v_m però non è immediato.

FACCIAMO UNA SEMPLIFICAZIONE. Se si toglie e^x dall'eq:

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

con gli stessi calcoli $\left(y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n,\ u_n = y_{2n+1},\ v_n = y_{2n} \right)$

$$(R_1) \qquad v_{n+1} = \frac{v_n}{(2n+1)(2n+2)},\ v_0 = 0$$

$$(R_2) \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{(2n+2)(2n+3)},\ u_0 = 1$$

(non ci sono più i termini derivati da e^x)

$\Rightarrow v_n = 0$. Vediamo chi sono gli u_n

$$u_0 = 0,\quad u_1 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{3!},\quad u_2 = \frac{1}{3!}\,\frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{5!}$$

$$\ldots \quad u_k = \frac{1}{(2k+1)!} \quad !!$$

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(x)$$

COME GIÀ DETTO, TUTTO QUESTO LAVORO È INUTILE PER RISOLVERE $y''=y$. Però l'idea funziona anche quando l'equazione non è a coeff. costanti

$$(L)\quad \begin{cases} (1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + p(p+1)\,y = 0 \\ y(0)=A \qquad y'(0)=B \end{cases}$$ (OMOGENEA)

Qui $p \in \mathbb{R}$ è un parametro assegnato, e cerco la soluzione $y(x)$ per $-1<x<1$

(Equazione di Legendre di parametro p)

NON SI RIESCE A RISOLVERE ESPLICITAMENTE (NON È A COEFF. COSTANTI). Però la teoria ci dice che

dati A e B c'è una e una sola soluzione $y:]-1,1[\to \mathbb{R}$