Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 38, 10 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2} = S(x) \qquad f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$$

PROBLEMA: VEDERE SE LA SERIE CONVERGE, SE $S(x)$ continua derivabile.

(1) Fissato x, se $x=0$ $f_n(x)=0 \Rightarrow$ la serie converge a 0 $(S(0)=0)$. Se $x>0$ $f_n(x)>0$ $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2} \frac{1}{x}$ Anche in questo caso la serie converge. Stesso discorso se $x<0$. NOTA $S(-x) = -S(x)$ (ogni $n \Rightarrow f_n(-x) = -f(x)$)

DUNQUE $S(x)$ è DEFINITA $\forall x \in \mathbb{R}$

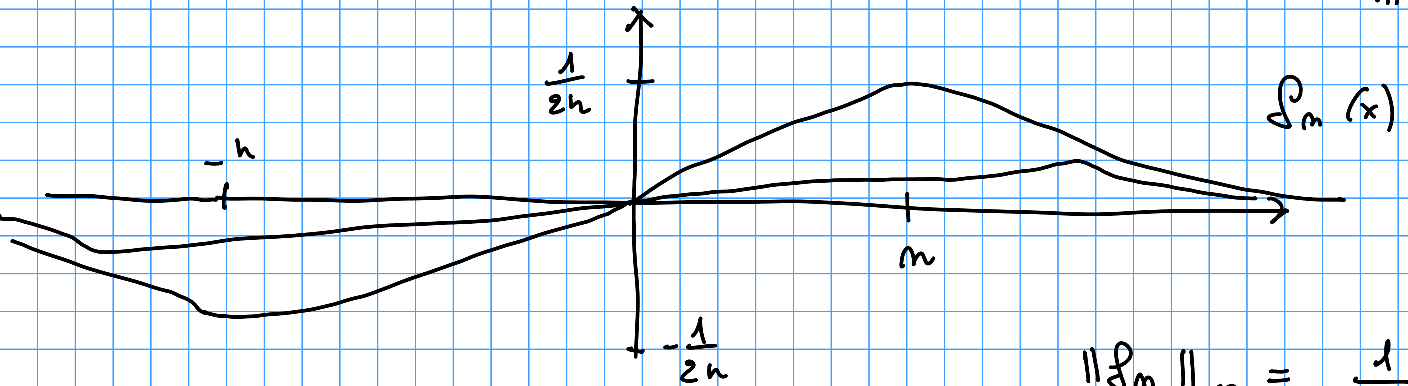
(2) f continua?! Provo a calcolare $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \left(=: \|f_n\|_\infty\right)$

Studiamo $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f_n DISPARI,

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} f_n(x) = 0 \qquad (\forall n \geq 1) \qquad f_n(0) = 0$$

$$f_n'(x) = \left(\frac{x}{x^2+n^2} \right)' = \frac{x^2+n^2 - x\,2x}{(x^2+n^2)^2} = \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)}$$

$f'(x) = 0$ se $x = \pm n$ e $f_n(\pm n) = \dfrac{\pm n}{n^2+n^2} = \pm \dfrac{1}{2n}$



$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$$

PURTROPPO $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$, NON POSSO DIRE CHE

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ CONV. UNIF. SU $\mathbb{R}$.

Posso mettermi su un <u>intervallo limitato</u>. Fisso $M > 0$

e considero $A = [-M, M]$. Se $n \geq M$ allora

(per quanto visto sopra) $\displaystyle\max_{-M \leq x \leq M} |f_n(x)| = f_n(M) = \frac{M}{M^2+n^2}$

(perché $n \geq M$ e quindi non ci sono più stazionari tra $-M$ e M

$\Rightarrow$ max è all'estremo)

Dato che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{M^2+n^2} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ CONV. UNIF. SU $[-M, M]$

Dato che ogni f_n è continua $\Rightarrow S(x)$ è continua su $[-M, M]$

Dato che M è arbitrario $\Rightarrow$ $S(x)$ è continua su $\mathbb{R}$
($x_0 \in \mathbb{R}$ S è continua in x_0 !)

(3) - IN MODO ANALOGO (vedi l'esempio della volta scorsa)

si può dim. che $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$

è unif. convergente su $[-M,M]$ $\forall M>0$ fissato. DUNQUE

$S(x)$ è derivabile in ogni x e vale

$$S'(x) = \sum \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$$

(bisogna dim. che $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{-M \le x \le M} \left| \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} \right| < +\infty$)

(4) Posso effettivamente dire che $\sum_n f_n$ NON CONV. UNIF. SU $\mathbb{R}$?!

NOTA CHE per ogni n si ha $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2+n^2} = 0$

Se la serie convergesse unif. su $\mathbb{R}$, avrei

$$\lim_{n\to\infty} S(x) = 0$$

Se questo non è vero $\Rightarrow$ la serie NON conv. unif. su $\mathbb{R}$

Fisso $m \in \mathbb{N}$ e calcolo $S(m)$ (metto $x = m$)

$$S(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n^2 + m^2} = m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + m^2} \geq$$

$$m \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2 + m^2} \geq m \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m^2 + m^2} = m \cdot \frac{m}{2m^2} = \frac{1}{2}$$

e quindi $S(m) \geq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

QUESTO IMPEDISCE che $\lim_{m \to \infty} S(m) = 0$

e a maggior ragione non può essere $\lim_{x \to \infty} S(x) = 0$

DUNQUE <u>NON</u> conv. unif su $\mathbb{R}$.

<u>NOTA</u> le f_n considerate sono $g_n\left(\frac{1}{x}\right)$ dove

$$g_n(x) = \frac{x}{n^2 x^2 + 1} \quad \text{(quelle della volta scorsa)}$$

$$\Downarrow$$

$$g_n(1/x) = \frac{1/x}{n^2/x^2 + 1} = \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{n^2 + x^2}{x^2}} = \frac{x}{n^2 + x^2} = f_n(x)$$

QUINDI $S(x) = S_1\left(\frac{1}{x}\right)$ dove $S_1(x) = \sum \frac{x}{n^2 x^2 + 1}$ e

quindi $\lim_{x \to +\infty} S(x) = \frac{\pi}{2}$ $\left(\lim_{x \to -\infty} S(x) = -\frac{\pi}{2}\right)$ per quanto già visto

ALTRO ESERCIZIO Stesse domande per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n e^{nx}}$$

. Poniamo $f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-nx}$

(1) Per quali x esiste $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n e^{nx}}$ (cioè per quali x la serie converge ?) CONV. PUNTUALE !

$x = 0$ O.K. e $S(x) = 0$

$x < 0$ NO c'è $f_n(x) \to +\infty$, (VINCE L'ESPONENZIALE)

$x > 0$ OK Si può usare il criterio del rapporto

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\cancel{x}\,(e^{-x})^{n+1}\,\frac{1}{n+1}}{\cancel{x}\,(e^{-x})^{n}\,\frac{1}{n}} = e^{-x}\frac{n}{n+1} \to e^{-x} < 1$$

se $x > 0$

DUNQUE $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n e^{nx}}$ esiste $\forall x \geq 0$

(2) Studiamo la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \geq 0} |f_n(x)|$

(la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \in A} |f_n(x)|$ SI CHIAMA "CONVERGENZA TOTALE" su A della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. DUNQUE

CONVERGENZA TOTALE SU A $\Rightarrow$ CONV. UNIF. SU A per la serie $\sum_n f_n$)

CALCOLIAMO DUNQUE $\max_{x\geq 0} f_n(x)$.

NOTA che $f_n(0)=0 = \lim_{x\to\infty} f_n(x)$ (VINCE e^{-nx} !!)

$$f_n'(x) = \frac{1}{n}\left(x\, e^{-nx}\right)' = \frac{1}{n}\left(e^{-nx} - x\,n\,e^{-nx}\right) = \frac{e^{-nx}}{n}(1-nx)$$

$f_n'(x)$ si annulla se $x=\frac{1}{n}$. $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}e^{-1}$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{e} < +\infty \Rightarrow \sum_n f_n$ CONV. TOTALMENTE

su $[0,+\infty[$ $\Rightarrow$ $\sum f_n$ CONV. UNIF. su $[0,+\infty[$

$\Rightarrow$ $S(x)$ CONTINUA $\forall\, x\geq 0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$$

(3) DERIVABILITÀ DI $S(x)$??

Mi serve la conv. unif. della serie delle derivate $\sum_n f_n'$

$$f_n'(x) = \frac{e^{-nx}}{n}(1-nx) \quad \leftarrow \quad \text{STUDIAMOLA !!}$$

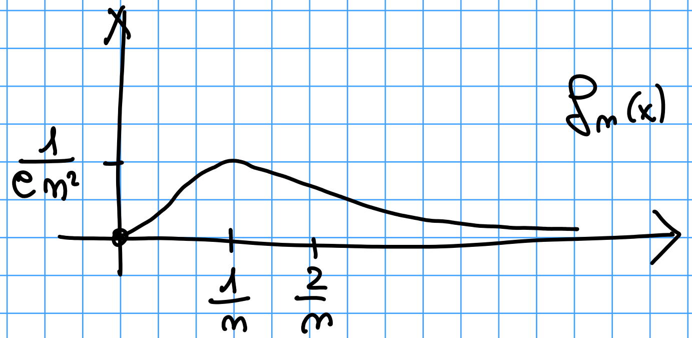
$$f_n'(0) = \frac{1}{n} \qquad \left(\text{SI VEDE DA QUI CHE } \sum_n f_n'(0) \text{ NON CONVERGE !!} \right)$$

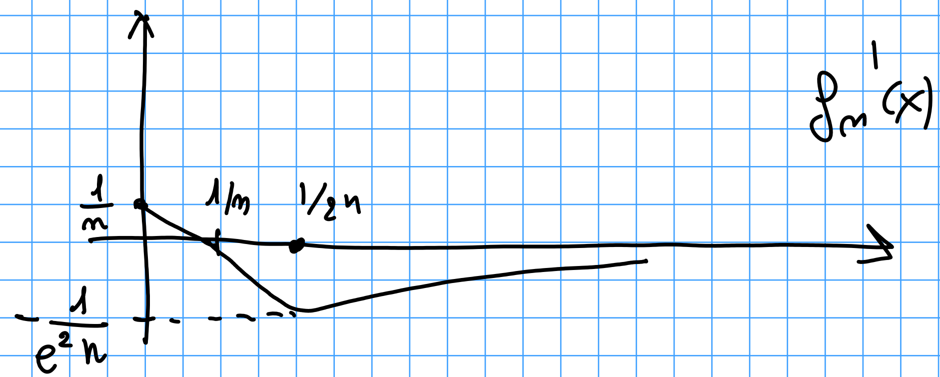
$$\lim_{x \to +\infty} f_n'(x) = 0 \qquad (\text{VINCE } e^{-x})$$

$$f_n''(x) = \frac{e^{-nx}}{n}(-n) - n\frac{e^{-nx}}{n}(1-nx) =$$

$$-e^{-nx} - e^{-nx}(1-nx) = e^{-nx}(nx-2)$$

$$f_n''(x) = 0 \iff x = \frac{2}{n} \qquad f_n'\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{e^{-2}}{n}(-1)$$





$$\left(\text{ANCHE SE NON SERVE NOTIAMO CHE } \|f_n'\|_\infty = \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{e^2 n}\right) = \frac{1}{n} \right)$$

$\sum_n f_n'$ NON CONV. UNIF. SU $[0,+\infty[$ Però i pti di max

tendono a zero. Allora se fisso $a>0$ e mi metto

in $[a,+\infty[$ $\Rightarrow$ $\max_{x\geq a} |f_n'(x)| = f_n'(a) = \frac{e^{-an}(na-1)}{n}$

PER n grande $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x\geq a} |f_n'(x)| < +\infty$

CIOE' $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ CONVERGE TOTALMENTE SU $[a,+\infty[$ $\Rightarrow$

CONV. UNIF. SU $[a+\infty[$ $\Rightarrow$ (dato che $a>0$ è arbitrario)

$S(x)$ è derivabile su ogni $x>0$

e vale la formula $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}(1-nx)$

$\underline{\forall\ x>0}$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} S'(x) = 0$

(f) NOTIAMO che la serie considerata è costruita a

partire da una SERIE DI POTENZE. INFATTI

$$\sum_{n=1} \frac{x}{n} e^{-nx} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n} = x\, S_1(e^{-x}) \quad \text{dove}$$

$$S_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n \quad \text{dove} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

RICORDANDO LE PROP. DELLE SERIE DI POTENZE (che ora rifaremo ..)

S_1 HA RAGGIO DI CONV. $R = \frac{1}{L}$ dove $L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$

e quindi $S_1(y)$ è definita se $-1 < y < 1$

(dunque posso considerare $S_1(e^{-x})$ se $x > 0$, cioè $e^{-x} < 1$)

<u>RICORDIAMO</u> ANCHE CHE $S_1'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, y^{n-1}}{n} =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} \underset{(m=n-1)}{\Longleftrightarrow} \sum_{m=0}^{\infty} y^m = \frac{1}{1-y}$$

SERIE GEOMETRICA

HO TROVATO CHE $S_1'(y) = \frac{1}{1-y} \quad \forall y \in]-1, 1[$

<u>INTEGRANDO</u> $S_1(y) = \int \frac{dy}{1-y} (+c) = -\ln(1-y) + c$

CHI È c ?? SO CHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \ln \frac{1}{1-y} + c \Leftarrow \text{METTIAMO } y=0$$

TROVO $0 = \ln\left(\frac{1}{1-0}\right) + c \implies c = 0$

DUNQUE $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-y}\right)$ $\left(\Rightarrow \lim_{y\to 1^-} S_1(x) = +\infty\right)$

TORNANDO ALLA SERIE INIZIALE ABBIAMO

$$S(x) = x\, S_1(e^{-x}) = x \ln\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)$$

ALLORA S si prolunga in $x=0$ dato che $\lim_{x\to 0} x \ln\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) = 0$

$$\left(\text{Hôpital}: \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1-e^{-x}}(-e^{-x})}{-\frac{1}{x^2}} = \right.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}x^2}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{1-e^{-x}} \underset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{e^{-x}} = 0$$

VA D'ACCORDO CON QUANTO TROVATO ALL'INIZIO - SI ERA VISTO CHE $S(x)$ esiste continua su $[0, +\infty[$

FACCIAMO $S'(x)$, usando l'espressione trovata.

$$S(x) = x \ln\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) \implies S'(x) \text{ esiste per } x > 0$$

$$S'(x) = \ln\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) - x\,\frac{1}{1-e^{-x}}\left(-e^{-x}\right) =$$

$$\underbrace{\ln\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)}_{①} + \underbrace{\frac{x\,e^{-x}}{1-e^{-x}}}_{②}$$

QUANDO $x \to 0^+$ ① $\to \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

$$② = e^{-x}\,\frac{x}{1-(1+x+o(x))} = e^{-x}\,\frac{x}{x+o(x)} \to 1$$

DUNQUE $S'(x) \to +\infty$ se $x \to 0^+$

Ne segue (. . .) che $S'(0) = +\infty$

$\approx$ $S(x)$

RIPRENDIAMO LE SERIE DI POTENZE

CONSIDERO (a_n) successione e la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \left(f_n(x) = a_n x^n \right)$$

VEDIAMO COME SI APPLICANO I TEOREMI SULLE SERIE DI FUNZIONI.

PONIAMO $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ e $R = \frac{1}{L}$ $\left(\begin{array}{ll} +\infty & \text{se } L = 0 \\ 0 & \text{se } L = +\infty \end{array} \right)$

GIÀ VISTO CHE $\sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n$ CONV. (PUNTUALM.) se $-R < x < R$

COSA POSSO DIRE SULLA CONV. UNIF. ??

PROVIAMO CON LA CONV. TOTALE: Fissiamo $R' < R$ e facciamo

$$M_n = \max_{|x| \le R'} |a_n x^n| = |a_n| (R')^n$$

Vediamo se converge $\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum |a_n| (R')^n$

SÌ perché $R' < R$

DUNQUE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ CONVERGE TOTALMENTE,

DUNQUE UNIFORMEMENTE SU OGNI $[-R', R']$ purché $R' < R$. $\Rightarrow$ $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ È CONTINUA SU $]-R, R[$ (lo è su ogni $[-R', R']$ con $R' < R$)

RIGUARDO ALLE DERIVATE NOTIAMO CHE $f_n'(x) = a_n n x^{n-1}$

$\Rightarrow$ la serie delle derivate è $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ che è UN'ALTRA SERIE DI POTENZE. IL RAGGIO DI CONV. DI QUESTA SERIE È $1/L_1$ dove

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} = L$$

DUNQUE $R_1 = R$ e quindi

$\sum_n f_n'$ CONV. UNIF. SU OGNI $[-R', R']$ con $R' < R$

$\Rightarrow$ $S(x)$ è derivabile e $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\otimes$

se $x \in [-R', R']$. Dato che $R' < R$ è arbitrario
la formula $\circledast$ vale $\forall x \in]R, R[$

ITERANDO SI HA CHE $S(x)$ è derivabile K volte
(qualunque K intero), nell'intervallo $]-R, R[$ e si ha:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^{\infty} a_m \underbrace{m(m-1)\cdots(m-k+1)}_{k \text{ fattori}} x^{m-k} \quad \text{se } |x| < R$$

IN PARTICOLARE

$$S^{(k)}(0) = a_k \, k(k-1)\cdots(1) \, x^0 = a_k \, k!$$

TUTTI GLI ADDENDI SONO NULLI
ECCETTO quello con $m = k$

DA CUI $$a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$$

GLI a_m sono i coeff di Taylor della funzione $S(x)$
(ottenuto dagli a_m ...)