Analisi Matematica II

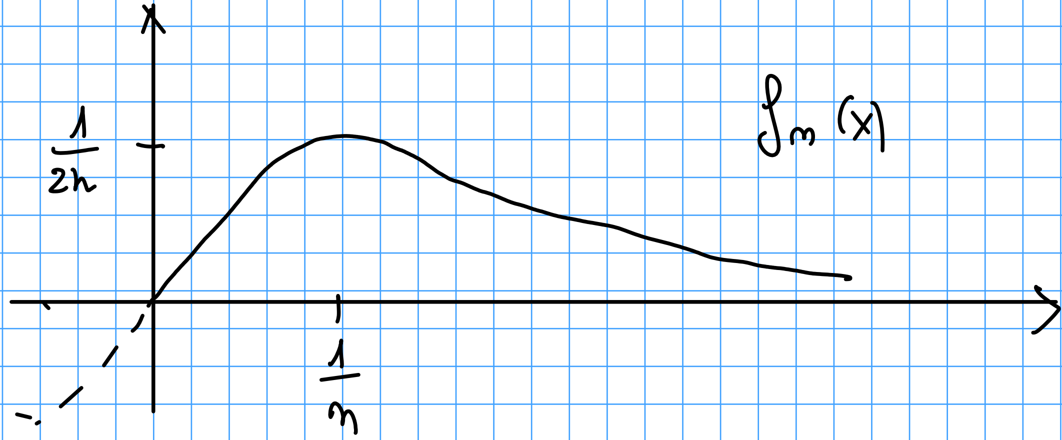
prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 37, 5 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2x^2+1}$$

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2x^2+1}$$



$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n} \quad \Big(= \|f_n\|_\infty\Big) \Rightarrow \sum \|f_n\|_\infty = +\infty$$

(FATTE SU TUTTO $\mathbb{R}$)

NON POSSO RICAVARE LA CONV. UNIFORME SU $\mathbb{R}$

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(n^2x^2+1)^2}$$

PERÒ se fisso $a>0$ e ripeto tutto su $[a,+\infty[$ (oppure su $]-\infty,-a]$ ...)

Trovo $\underbrace{\max_{x\geq a} |f_n(x)|}$ $= f_n(a) = \frac{a}{a^2n^2+1} \Rightarrow \sum_{n=1} \|f_n\|_{\infty,[a,\infty[} < +\infty$

perché $\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2x^2+1}$ è continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

DERIVABILITÀ DI $S(x)$?? Dobbiamo vedere se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ CONV. UNIF.

su $[a, +\infty[$, dove $a>0$ è fissato (è inutile provare su tutto $\mathbb{R}$)

Provo a calcolare $\displaystyle\max_{x\ge a} |f_n'(x)| = \max_{x\ge a} \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = ??$

$$= \max_{y\ge n^2a^2} \left|\frac{1-y}{(1+y)^2}\right| = \frac{|1-n^2a^2|}{(1+n^2a^2)^2} \quad \left(y = n^2x^2 \iff x = \frac{\sqrt{y}}{n} \quad \left(\ge a \iff y \ge n^2a^2 \right.\right.$$

↓ VEDI SOTTO

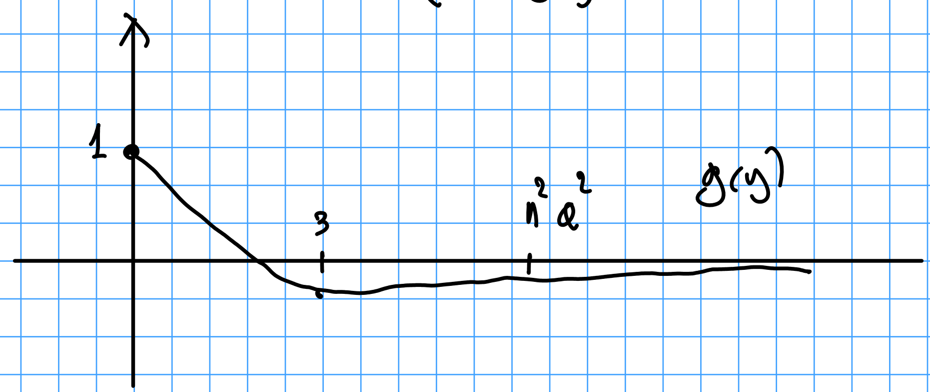
$g(y) = \dfrac{1-y}{(1+y)^2}$ studiamo g per $y \ge 0$

$g(0) = 1$, $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} g(y) = 0$

$$g'(y) = \frac{-(1+y)^2 - (1-y)2(1+y)}{(1+y)^4} = \frac{-(1+y) - 2(1-y)}{(1+y)^3} = \frac{-3+y}{(1+y)^3}$$

$g'(y) = 0 \iff y = 3$

$g(3) = \dfrac{-2}{16} = -\dfrac{1}{8}$



DUNQUE $\max_{x \geq a} |f_n'(x)| = \dfrac{n^2 a^2 - 1}{(n^2 a^2 + 1)^2} \sim \dfrac{n^2 a^2}{n^4 a^4} = \dfrac{1}{n^2 a^2}$ ⇐ SERIE CONVERGENTE

$\Rightarrow \sum_n f_n'$ CONV. UNIFORMEMENTE SU (OGNI) $[a, +\infty[$

$\Rightarrow S(x) = \sum_{1}^{\infty} \dfrac{x}{n^2 x^2 + 1}$ È DERIVABILE se $x \neq 0$

$$S'(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} \quad \text{se } x \neq 0$$

ALTRA CONSEGUENZA: Dato che $\sum_1^{\infty} f_n$ $\boxed{\text{CONV. UNIF. SU } [1, +\infty[}$ (*)

e dato che $\forall n$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{x}{n^2 x^2 + 1} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} S(x) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 x^2 + 1} = 0$$

POSSO SCAMBIARE $\lim_{x \to +\infty}$ con $\sum_{n=1}^{\infty}$ PER (*)

VEDIAMO COSA SUCCEDE IN $x = 0$

MOSTRIAMO CHE $S(x)$ NON È CONTINUA IN $x=0$

PRENDIAMO $x = \frac{1}{m}$ con $m \in \mathbb{N}$

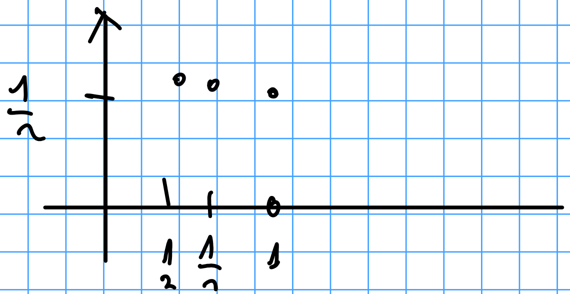
$$S\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/m}{\left(\frac{n^2}{m^2}+1\right)} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n^2}{m^2}+1} \geq \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\underbrace{\frac{n^2}{m^2}}_{\leq 1}+1}$$

$$\geq \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{1}{m}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}}_{m}\Big) = \frac{1}{2}$$

DUNQUE $S\left(\frac{1}{m}\right) \geq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} S\left(\frac{1}{m}\right) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} S(x) \geq \frac{1}{2} = 0 = S(x)$$

(in realtà non posso dire che il limite esiste - DI SICURO NON È ZERO)



DUNQUE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ NON CONV. UNIF. SU $\mathbb{R}$

(se no sarebbe continua)

NOTA :

$$\sum_n \|f_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow \sum_n f_n \text{ CONV. UNIF.} \Rightarrow \sum_n f_n(x) \text{ È CONTINUA}$$

dunque dalla mancata continuità $\Rightarrow$ NON CONV. UNIF.

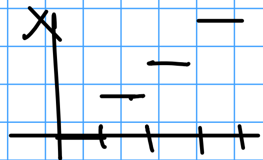
IN REALTÀ POSSIAMO TROVARE ESPLICITAMENTE

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 x^2 + 1}$$

. Possiamo vedere la serie come un integrale improprio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 x^2 + 1} = \int_1^{+\infty} \frac{x}{[y]^2 x^2 + 1}\, dy = (*)$$

$[y]$ = parte intera di y



$$y - 1 < [y] \leq y$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{y^2 x^2 + 1}\, dy \leq (*) \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{(y-1)^2 x^2 + 1}\, dy$$

$$= \quad (xy = t) \qquad\qquad = \quad (y-1)x = t$$

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} \qquad\qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \leq S(x) \leq \left[\arctan t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} S(x) = \frac{\pi}{2}$$