Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 36, 4 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Abbiamo definito due nozioni di convergenza per una successione di funzioni (f_n) a una funzione f.

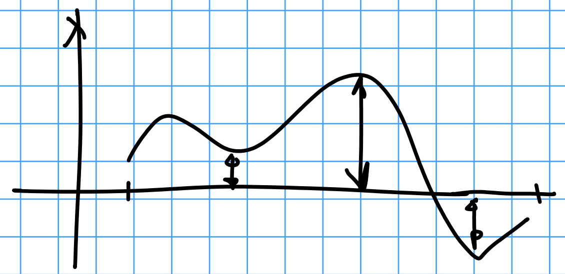
(1) CONVERGENZA PUNTUALE : $\forall x \in A$: $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

(2) CONVERGENZA UNIFORME

(2) $\Rightarrow$ (1), ma non il viceversa.

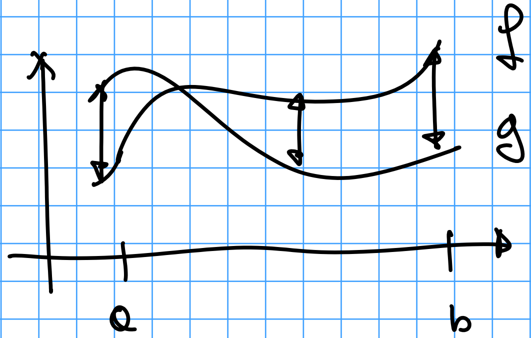
Def. Data una funzione f definita su un insieme A, a valori in $\mathbb{R}^N$ (tipicamente in $\mathbb{R}$) chiamo NORMA UNIFORME DI f il numero:

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in A} \| f(x) \|$$



Se faccio questa definizione posso chiamare "DISTANZA UNIFORME" tra due funzioni f e g

$$d_\infty(f, g) := \| f - g \|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|$$



Allora la convergenza uniforme di f_n a f equivale a:

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$$

QUESTA ESPRESSIONE $\| \cdot \|_\infty$ ha le stesse proprietà formali del modulo in $\mathbb{R}^n$,

- $\| f \|_\infty \geq 0$, $\| f \|_\infty = 0$ sse $f(x) = 0 \ \forall x \in A$
- $\| -f \|_\infty = \| f \|_\infty$
- $\| f + g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$

Con queste proprietà si può definire il limite $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ che corrisponde esattamente a dire che $f_n \to f$ uniformemente.

Convergenza uniforme e derivata:

<u>Teorema</u> Sia f_n una successione di funzioni, definite su un intervallo $[a,b]$, a valori reali, con f_n DERIVABILI CON f'_n CONTINUE.

Supponiamo che

(a) $f_n \to f$ puntualmente

(b) $f'_n \to g$ <u>UNIFORMEMENTE</u>

(dove $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$) _ ALLORA

(1) $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE

(2) f è derivabile e $\boxed{f' = g}$

DUNQUE $\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$

<u>DIM.</u> la parte (2). Per questo basta dimostrare che

$$(*) \quad \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx = f(x_2) - f(x_1) \qquad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

sapendo che g è continua (T. FOND. CALCOLO INT. II)

$$\left(f(x) = f(a) + \underbrace{\int_a^x g(t)\,dt}_{\text{è primitiva di } g} \Rightarrow f' = g \right)$$

Supponiamo che, per ogni n,

$$f_n(x_2) - f_n(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_n'(x)\, dx$$

SO ANCHE CHE $f_n(x_2) \to f(x_2)$ / $f_n(x_1) \to f(x_1)$

per la convergenza puntuale delle f_n. A destra posso dire

che $\int_{x_1}^{x_2} f_n'(x)\, dx \to \int_{x_1}^{x_2} g(x)\, dx$, dato che $f_n' \to g$ UNIF.

DUNQUE, PASSANDO AL LIMITE PER $n \to \infty$, OTTENGO $(*)$

HO DIM. LA TESI (2)

SERIE DI FUNZIONE

DEF- Data una successione di funzioni (f_n), definite su un insieme A, a valori in $\mathbb{R}^N$, chiamo somme parziali le funzioni

$$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

DICO che la "serie di funzioni"

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è PUNTUALMENTE CONVERGENTE, SE esiste una funzione $S(x)$ tale che $S_n(x) \to S(x)$ $\forall x$

(cioè se per ogni $x \in A$ la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$)

DICO CHE la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, CONVERGE UNIFORMEMENTE, se $S_n \to S$ UNIFORMENTE

(Per quanto visto, $S(x)$ deve essere $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, cioè la somma, x per x, della serie)

PROPRIETÀ (1) Se la serie converge unif $\Rightarrow$ converge puntualmente.

(2) Se $\sum_n f_n$ CONV UNIF. $\Rightarrow$ $f_n \to 0$ UNIF.

$\left(\max_{x \in A} f_n(x) \to 0 \right)$

(3) Se $\sum_n f_n$ CONV. UNIF., e se ogni f_n è continua $\Rightarrow$

la SOMMA $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ È UNA FUNZIONE

CONTINUA (DELLA x) : INFATTI se le f_n sono continue $\Rightarrow$ $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$ è continua $\forall n$

Inoltre $S_n \to S$ UNIF., da cui S è continua

$\boxed{4}$ Se f_n sono continue, $\sum_n f$ converge unif $\Rightarrow$

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(Si può scambiare serie e integrale)

$\boxed{5}$ Se (f_n) è una successione di funzioni derivabili su $[a,b]$, (con f_n' continue) Se $\sum_n f_n$ CONV. PUNTUALMENTE E $\sum_n f_n'$ CONV. UNIFORMEMENTE $\Rightarrow$

La somma $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è una funzione derivabile e si ha

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

$$\left(\text{cioè} \quad \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \right)$$

Infatti se $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) \Rightarrow$

S_n è derivabile e si ha $S_n'(x) = f_1'(x) + \dots + f_n'(x)$.

PER IPOTESI $S_n \to \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ PUNTUALMENTE

$S_n' \to \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ UNIFORMEMENTE

Per il teorema di prima

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è derivabile e la sua derivata è $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$

COME TROVO LA CONVERGENZA UNIFORME DI UNA SERIE ??

(se guardo la def. mi serve conoscere l'espressione della somma $\sum_n f_n(x)$) Fortunatamente c'è UN CRITERIO che mi permette di trovare la conv. unif SENZA conoscere esplicitamente $\sum_n f_n(x)$. Si tratta di un criterio analogo a quello della convergenza assoluta per le serie numeriche

TEOREMA Data (f_n); se la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \quad \text{CONVERGE} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f \quad \text{CONVERGE UNIFORMEMENTE}$$

(NON VALE $\Leftarrow$ IN GENERALE)

(NO DIM.)

NOTA CHE $\sum \|f_n\|_\infty$ È UNA SERIE NUMERICA A TERMINI ≥ 0

ESEMPIO $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

VOGLIO STUDIARE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = S(x)$

- CONVERGENZA PUNTUALE. SÌ dato che fissato x $\frac{1}{n^2+x^2} \simeq \frac{1}{n}$ e so che $\sum_n \frac{1}{n^2}$ CONVERGE
- DISCUTIAMO LA CONV UNIFORME.

Sappiamo che per convergere uniformemente (su $\mathbb{R}$) deve essere $f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE, cioè

$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+n^2}$ deve tendere a zero quando $n \to \infty$

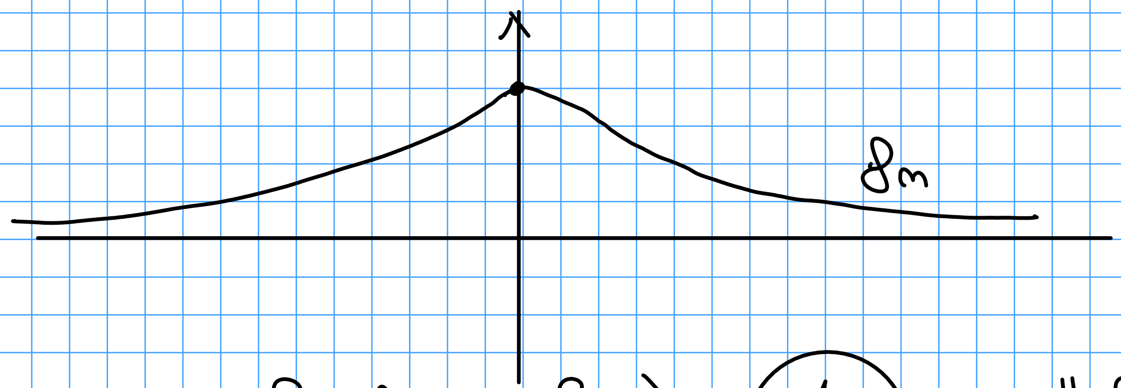
$\Updownarrow$

FISSATO n

VEDIAMO QUANTO FA: studio la funzione $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+n^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0$$

$$f_n'(x) = \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2} \Rightarrow f_n'(x) \text{ si annulla in } x=0$$



$$\Rightarrow \max_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = f_n(0) = \frac{1}{n^2} = \|f_n\|_\infty$$

Dato che $\frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE

"PUÒ CONVERGERE"

QUESTO CALCOLO MOSTRA ANCHE CHE

$$\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n^2} \quad \text{CONVERGE}.$$

DUNQUE POSSO APPLICARE IL TEOREMA $\Rightarrow \sum_n f_n$ CONV.

UNIFORMEMENTE $\Rightarrow S(x) = \sum_n \frac{1}{n^2+x^2}$ È CONTINUA in x.

• DOMANDA SUCCESSIVA. Posso dire che S è derivabile ??

Posso dire che $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$

Devo ripetere quanto fatto sopra per la serie delle derivate.

Posto $g_n(x) = \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2} = -2x(x^2+n^2)^{-2}$ devo trovare $\max_x |g_n(x)|$

STUDIO g_n: (NOTA g_n È DISPARI)

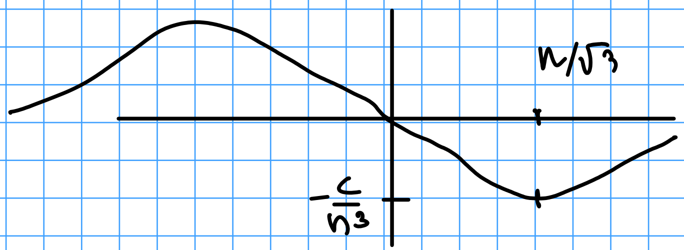
$$\lim_{n\to-\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0 \quad \left(\sim \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}\right)$$

$$g_n'(x) = -2(x^2+n^2)^{-2} - 2x(-2)(x^2+n^2)^{-3}(2x) =$$

$$-2(x^2+n^2)^{-2} + 8x^2(x^2+n^2)^{-3} = 2(x^2+n^2)^{-3}\left[-(x^2+n^2)+4x^2\right] =$$

$$\frac{3x^2-n^2}{(x^2+n^2)^3}$$ si annulla per $x=\pm\frac{n}{\sqrt{3}}$

$$g_n\left(\pm\frac{n}{\sqrt{3}}\right) = \mp\frac{2n}{\sqrt{3}}\left(\frac{n^2}{3}+n^2\right)^{-2} = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{n}{\left(\frac{4}{3}n^2\right)^2} = \mp\frac{c}{n^3}$$



$$c = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big/\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$\Rightarrow \|g_n\|_\infty = \frac{c}{n^3} \Rightarrow \sum_n \|g_n\|_\infty$ CONVERGE

$\Rightarrow S(x)$ è derivabile e $S'(x) = \sum_n g_n(x) = -\sum \frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$

ANALOGAMENTE SI POTREBBE DIMOSTRARE CHE $\exists\, S'', S''' \dots$
e che si può scambiare derivata e serie, per ogni ordine di derivazione.

<u>ALTRO ESEMPIO</u> $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2x^2+1}$. Stesse domande di prima

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2x^2+1} \qquad \leftarrow \text{ Studio questa funzione: (su } \mathbb{R}\text{)}$$

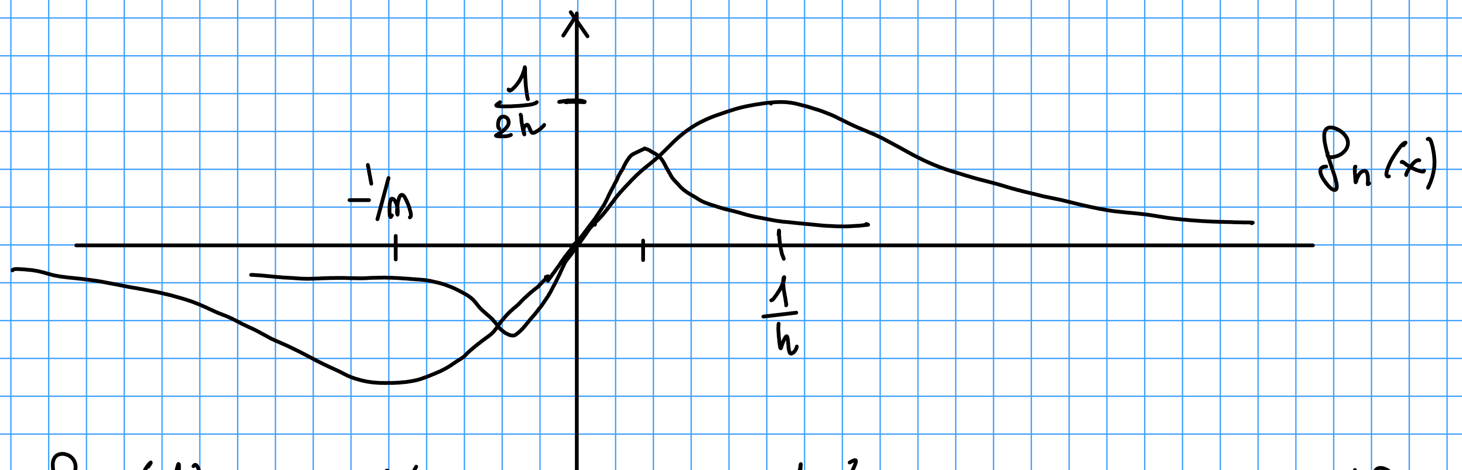
SE $n \geq 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \left(\frac{x}{n^2x^2+1} \sim \frac{1}{n^2 x} \right)$$

f_n DISPARI

$$f_n'(x) = \frac{n^2x^2+1 - x\, 2n^2x}{(n^2x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2n^2}{(n^2x^2+1)^2}$$

che si annulla quando $x = \pm \frac{1}{n}$

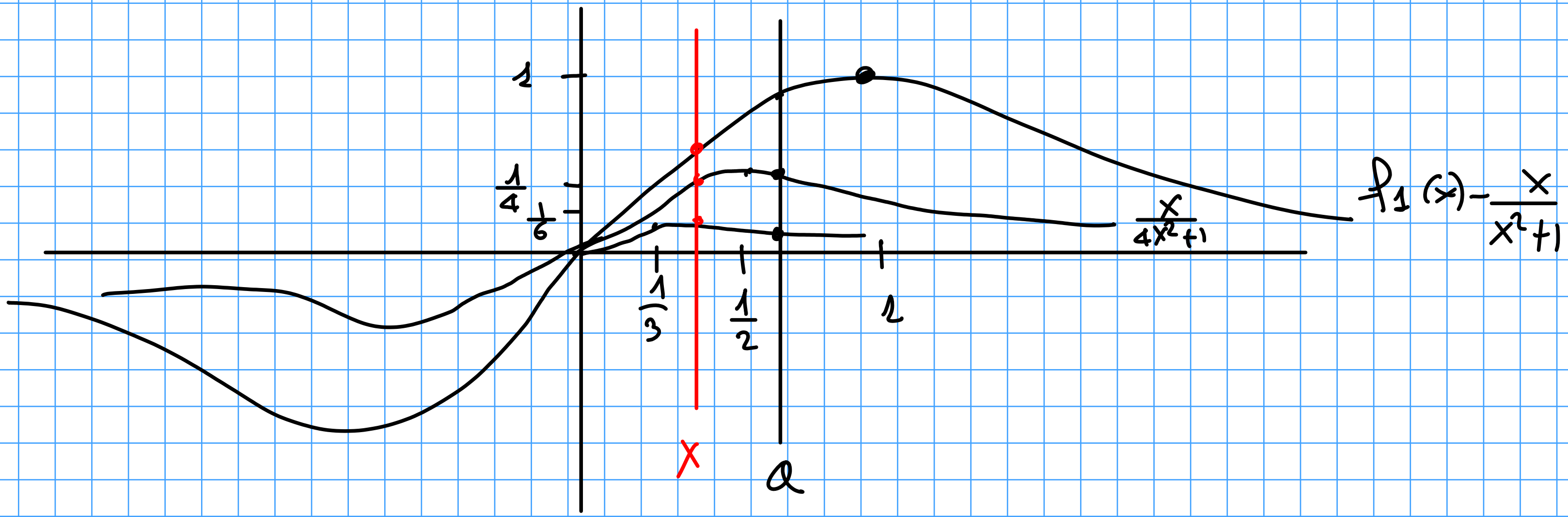


$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{n^2(1/n)^2+1} = \frac{1/n}{1+1} = \frac{1}{2n} = \max_x |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty$$

STAVOLTA $\sum_n \|f_n\|_\infty = +\infty$ (viene $\sum_n \frac{1}{2n} = +\infty$!)

NON POSSO APPLICARE I TEOREMI

NON SU TUTTO $\mathbb{R}$



Si vede che, x fissato, $\sum \frac{x}{n^2x^2+1} < +\infty$ perché

a x fissato $x \neq 0$ $\underbrace{\frac{x}{n^2x^2+1} \simeq \frac{1}{n^2 x}}$ e la serie $\frac{1}{x}\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

se $x = 0$ $\sum_n 0 = 0$

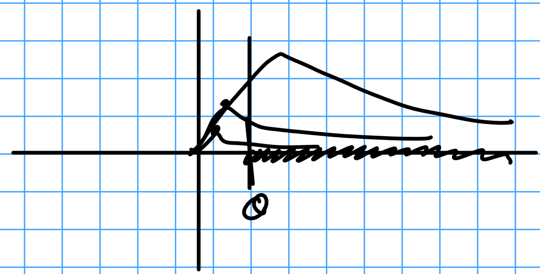
peggiora se $x \sim 0$

PERÒ i punti di massimo $\longrightarrow 0$;

IDEA: VICINO A ZERO LE COSE VANNO MALE. SCANSIAMO LO ZERO

FISSIAMO UN NUMERO $a > 0$ e ragioniamo su

$[a, +\infty[$



Notiamo che $\frac{1}{n} < a$

per n grande $\left(n > \frac{1}{a}\right)$. Per questi n $\max_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a)$

Se faccio la norma uniforme solo su $[a, +\infty[$

$$M_n = \max_{x \geq a} f_n(x) = \begin{cases} \text{quello di prima} & n \leq 1/a \\ \dfrac{a}{n^2 a^2 + 1} & n > 1/a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n \leq 1/a} \ldots + \underbrace{\sum_{n > 1/a} \frac{a}{n^2 a^2 + 1}}$$

CONVERGE perché $\frac{a}{n^2 a^2 + 1} \sim \frac{1}{a} \frac{1}{n^2}$

DUNQUE POSSO APPLICARE IL TEOREMA PER $A = [a, +\infty[$,

e ottengo che $\sum_n f_n$ CONV. UNIF. SU $[a, +\infty[\Rightarrow$

$S(x)$ È CONTINUA SU $[a, +\infty[$

Dato che α è un arbitrario numero >0 $\Longrightarrow$

$S(x)$ È CONTINUA $\forall x>0$ (e $\forall x<0$ ...
ragionando ...)

NON DEDUCO LA CONTINUITÀ IN $x=0$! !