Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 35, 3 marzo 2014

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Successioni / serie di funzioni

Per ogni n intero sia data una funzione $f_n : A \to \mathbb{R}^N$

(tipicamente $A =$ intervallo in $\mathbb{R}$ e $N=1$)

CHIAMO $(f_n)_n$ successione di funzioni

ESEMPIO $\quad f_n(x) = e^{-nx}$

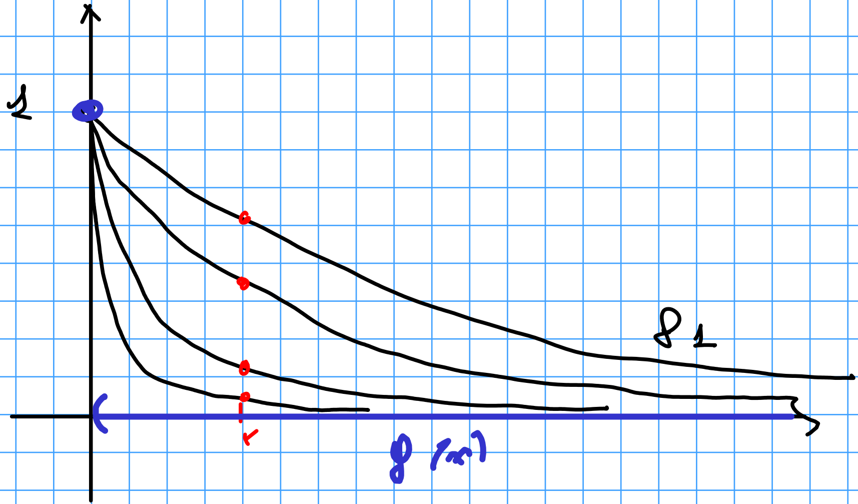
DEFINIZIONE Se (f_n) è una successione di funzioni e f è una funzione, DICO che f_n tendono puntualmente a f su A, se per ogni $x \in A$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

GUARDIAMO L'ESEMPIO SOPRA: $f_n(x) = e^{-nx}$. Se faccio tendere $n \to \infty$ TROVO

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ +\infty & x<0 \end{cases}$$

POSSO DIRE CHE f_n TENDONO PUNTUALMENTE A f, su $\overbrace{[0,+\infty[}^{A}$

dove $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$ $\quad$ (NON CONSIDERO LE $x<0$)



NOTA Ogni f_n è una funzione continua, MA $f(x)$ è discontinua

IN ALTRI TERMINI

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=0} \neq \underbrace{\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0^+} f_n(x)}_{=1}$$

ALTRO ESEMPIO $\quad f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ su $A = [0, +\infty[$

Vediamo se esiste limite puntuale delle $f_n(x)$. DUE CASI:

$x > 0 \qquad n^2 x e^{-nx} \longrightarrow 0$ (VINCE e^{-nx})

$x = 0 \qquad f_n(x) = 0 \ \forall n$ dunque $f_n(x) \to 0$

IN DEFINITIVA f_n TENDE PUNTUALMENTE ALLA FUNZIONE NULLA (su $[0, +\infty[$)

PROVIAMO A CALCOLARE $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx =$

$\displaystyle\int_0^1 n^2 x e^{-nx}\,dx$ sostituisco $y = nx \Rightarrow dy = n\,dx$

$$\int_0^n y e^{-y}\,dy = \left[y(-e^{-y}) \right]_0^n + \int_0^n e^{-y}\,dy =$$

$$-n e^{-n} + \left[-e^{-y} \right]_0^n = -n e^{-n} - e^{-n} + 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

IN QUESTO CASO SI HA:

$$1 = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

LA CONV. PUNTUALE "SI COMPORTA MALE" RISPETTO ALLA CONTINUITÀ E AGLI INTEGRALI

CI SERVE UNA NOZIONE DI "$f_n \to f$" PIÙ FORTE DELLA CONVERGENZA PUNTUALE

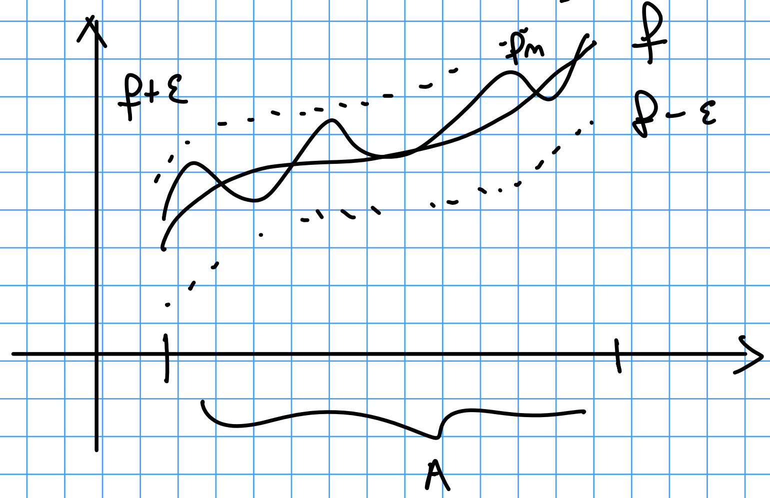
<u>DEFINIZIONE</u> (CONVERGENZA UNIFORME)

Dato una successione di funzione $f_n : A \to \mathbb{R}^N$ e una $f : A \to \mathbb{R}^N$

Dico che "f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A f" se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \underline{\forall x \in A} \quad \| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon$$

IDEA :



per n grande le f_n devono stare tra $f_n - \varepsilon$ e $f_n + \varepsilon$

$\forall x$

Nel caso della conv. puntuale HO :

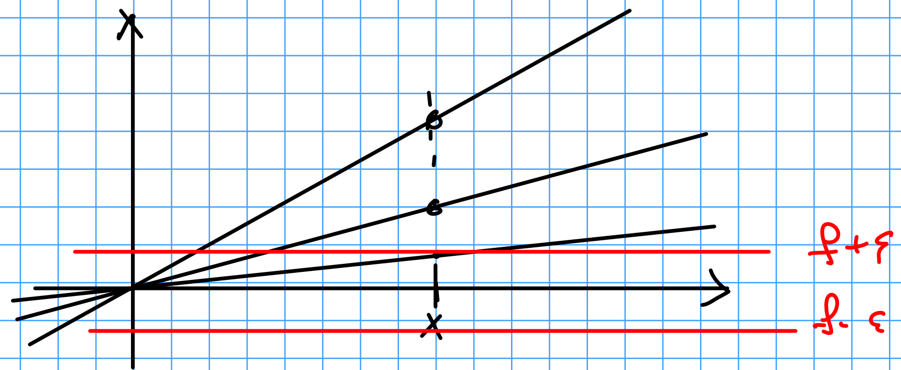
$$\forall \varepsilon \quad \forall x \quad \exists\, \bar{n} : \quad f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

DIPENDE DA X (oltre che da ε)

$\bar{n}$ VA BENE PER OGNI x

<u>ALTRO ESEMPIO</u> $\qquad f_n(x) = \dfrac{x}{n} \qquad A = [0, +\infty[$

CHIARAMENTE $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x}{n} = 0 \quad \forall x$, cioè $f_n \to 0$ PUNTUALMENTE



NON C'È <u>NESSUNA f_n</u> INTERAMENTE COMPRESA TRA $f - \varepsilon$ e $f + \varepsilon$

Anche se $f_n(x) \to f(x)$ $(=0)$

FISSIAMO $\varepsilon > 0$, come deve essere $\bar{m}$ in modo che

$$|f_m(x) - f(x)| = |f_m(x)| < \varepsilon \quad ??$$

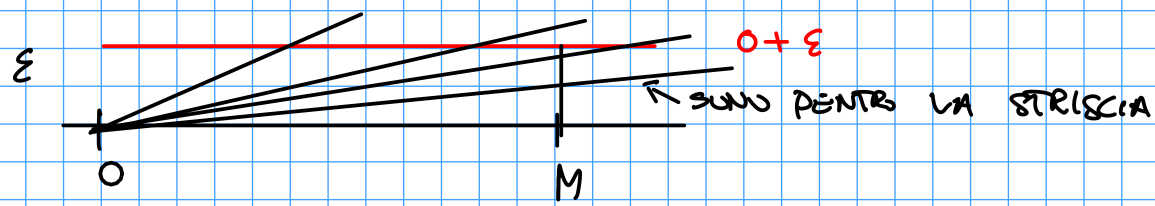
DEVE ESSERE $\left|\frac{x}{m}\right| < \varepsilon \iff m > \frac{|x|}{\varepsilon}$ DIPENDE DA x

LA CONVERGENZA PUNTUALE NON È UNIFORME SU $[0, +\infty[$

SE PERÒ MI METTO SU UN QUALUNQUE INTERVALLO $[0, M]$, con $M < +\infty$ $\Rightarrow$ f_m CONVERGONO UNIFORMEMENTE

INFATTI se $\bar{m} > \frac{M}{\varepsilon}$ si ha

$$\left|\frac{x}{m}\right| < \varepsilon \quad \forall m \geq \bar{m} \quad \forall x \in [0, M]$$



DUNQUE LA NOZIONE DI CONV UNIFORME DIPENDE DA A

ALTRO MODO DI DEFINIRE LA CONV. UNIF. :

Date f_n, f dico che $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SE

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

(se le funzioni sono continue e A è chiuso, limitato questo sup è un massimo!)

Nell' ultimo esempio, $f_n(x) = \frac{x}{n}$ $f(x)=0$ si ha

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$$ NON TENDE A ZERO

mentre $$\sup_{0\leq x\leq M} |f_n(x) - f(x)| = \max_{0\leq x\leq M} \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{M}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Come già visto f_n NON TENDE UNIF. A ZERO SU $[0,\infty[$, mentre tende unif a zero su $[0,M]$ ($\forall M>0$).

OSS. Se f_n tende uniformemente a $f \Longrightarrow$

f_n tende puntualmente a f

(NO DIM — è facile dedurlo dalle definizioni!

Se f_n tendono unif. e qualcosa $\Rightarrow$ devono tendere al limite puntual.

IL LIMITE PUNTUALE INDIVIDUA IL (L'UNICO) LIMITE UNIFORME

TEOREMA (SCAMBIO DI LIMITI)

- Se $f_n : A \to \mathbb{R}^N$ tendono uniformemente a una $f : A \to \mathbb{R}^N$
- Se x_0 punto di accumulazione per A
- Se ogni f_n ammette limite in x_0, cioè

$$\exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \ell_n \quad (\text{finito})$$

ALLORA

(a) $\exists\ \ell = \lim_{n \to \infty} \ell_n$

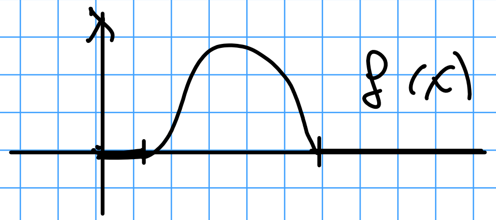
(b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

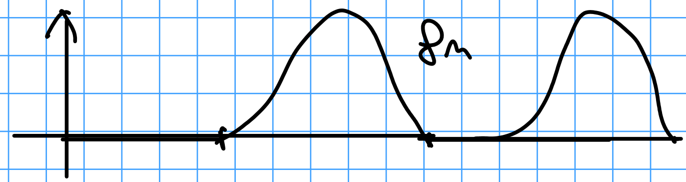
(NO DIM.)

IN PARTICOLARE SE ogni f_n è continua in x_0 $\Longrightarrow$ f è continua in x_0

LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI CONTINUE È CONTINUA

ALTRO ESEMPIO Prendiamo f come nel disegno:





e poniamo $f_n(x) = f(x-n)$

E' chiaro che le $f_n(x) \to 0$ ma le f_n NON TENDONO UNIF. A ZERO

TEOREMA (SCAMBIO CON GLI INTEGRALI)

Supponiamo $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_n integrabili su $[a,b]$, $f_n \to f$ uniformemente su $[a,b]$.

ALLORA f è integrabile su $[a,b]$ e

$$(*) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \quad \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \right)$$

Dim Diamo per buono che f è integrabile (se per esempio le f_n fossero continue $\Rightarrow f$ continua $\Rightarrow$ integrabile)

Facciamo vedere che vale la formula $(*)$

Basta mostrare che $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx = 0$

MA $\left|\int_a^b \left(f_n(x)-f(x)\right) dx\right| \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\, dx \le$

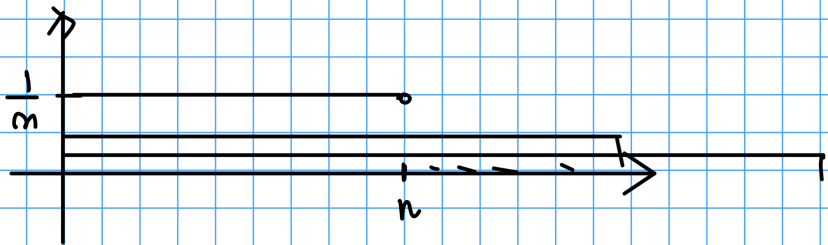
$$\int_a^b \max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|\, dx = (b-a)\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \to 0$$

per def. di convergenza uniforme

(in realtà dovrei scrivere sup...)

$\Rightarrow$ vale la formula.

ATTENZIONE. Il teorema non è più vero per gli integrali (impropri) su intervalli illimitati.



$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & 0 \le x \le n \\ 0 & x > n \end{cases}$$

Allora $f_n \to 0$ uniformemente su $[0,+\infty[$, dato che

$$\max_{x\ge 0}|f_n(x) - 0| = \max_{x\ge 0} f_n(x) = \frac{1}{n} \to 0$$

Però $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^n \frac{1}{n}\,dx = 1 \ne \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0$

PROBLEMA   Scambio limite / derivata ??

Se $f_n \to f$ uniformemente

Se f_n ammettono derivata f_n'

POSSO DIRE CHE f HA DERIVATA e che $f_n' \to f'$

NO

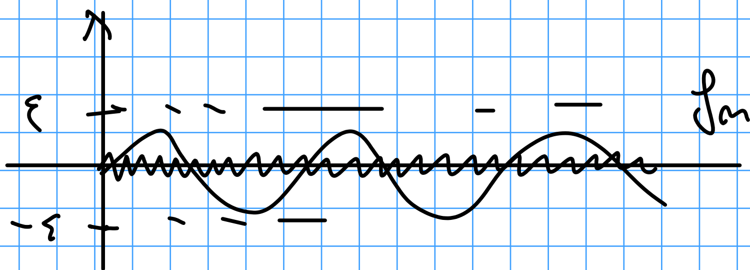
Può non esistere f'

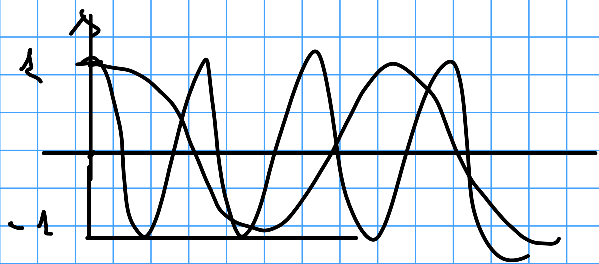
Anche se f' esiste può capitare che $f' \neq \lim_n f_n'$

POSSIBILE CONTROESEMPIO

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

$f_n \to 0$ UNIF. su $\mathbb{R}$ perché $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sin(nx) \right| \le \frac{1}{n} \to 0$





$f_n'(x) = \cos(nx)$ NON TENDE UNIF. A ZERO

L'OPERAZIONE DI DERIVATA NON VA D'ACCORDO CON LA CON LA CONV. UNIFORME, PERÒ LE COSE FUNZIONANO AGGIUNGENDO UN'IPOTESI

TEOREMA Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ successione di funzioni derivabili, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tali che

$$f_n \to f \quad \text{PUNTUALMENTE SU } [a,b]$$

$$f_n' \to g \quad \text{UNIFORMEMENTE SU } [a,b]$$

Allora

(a) $f_n \to f$ uniformemente

(b) f è derivabile e $f' = g$

MORALE: Se $f_n \to f$ unif. NON È DETTO CHE $f_n' \to f'$

MA se $f_n' \xrightarrow[\text{UNIF.}]{} \text{qualcosa} \Rightarrow f_n' \to f'$

Per poter dire che

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

MI SERVE CHE $\frac{d}{dx} f_n \to$ qualcosa UNIFORMEMENTE