Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 34, 18 dicembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

CASI DI EQ. PER CUI ESISTONO TECNICHE RISOLUTIVE

N=1

(1)

$$y' = A(x)\, y + B(x)\, y^{\alpha} \qquad \alpha \neq 1$$

($\alpha = 1 \Rightarrow$ EQ. LINEARE)

(EQ. DI BERNOULLI)

DIVIDO PER y^{α} — SUPPONGO CHE SIA $y^{\alpha}(x) \neq 0$

$$\underbrace{y^{-\alpha}\, y'}_{z'/(1-\alpha)} = A(x)\, y^{1-\alpha} + B(x)$$

PRENDO $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}\, y'$

TROVO

$$z' = (1-\alpha)A(x)\, z + (1-\alpha)B(x) \qquad \leftarrow \text{EQ. LINEARE}$$

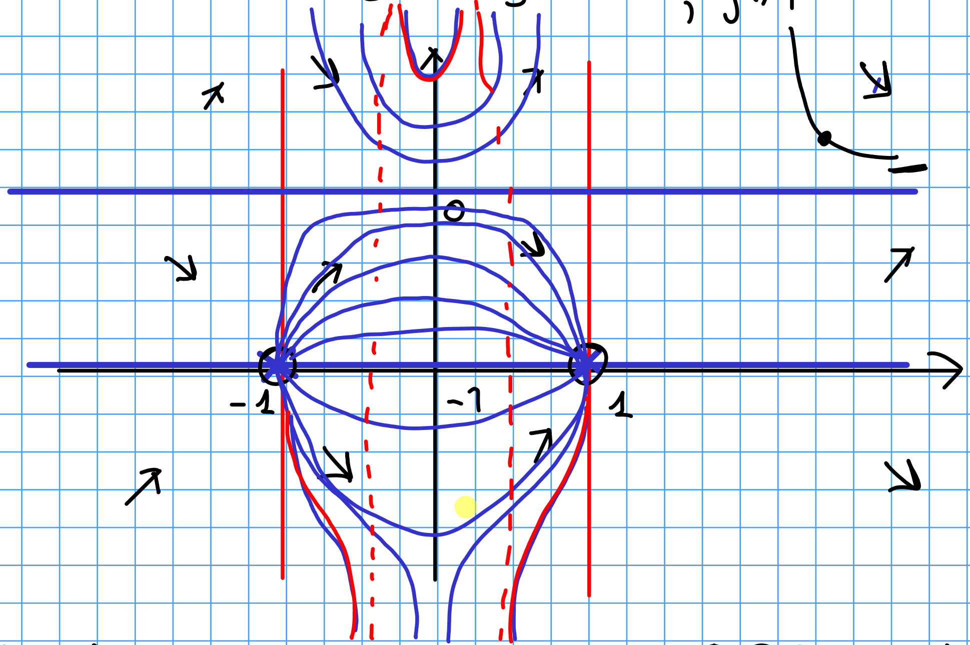
RISOLVO IN z e TORNO INDIETRO ...

ESEMPI

$$(1-x^2)\,y' - x y - x y^2 = 0$$

$$y' = \frac{x}{1-x^2}\, y + \frac{x}{1-x^2}\, y^2 \qquad \left(= \frac{x}{1-x^2}\, y(1+y)\right)$$

(1) CI SONO LE SOL. $y(x)=0$, $y(x)=1$ $\forall x \neq \pm 1$



FACCIAMO I CALCOLI VEDENDO L'EQ. COME UNA BERNOULLI

$$y^{-2}\, y' = \frac{x}{1-x^2}\, y^{-1} + \frac{x}{1-x^2}$$

$z = y^{-1} \quad \Rightarrow \quad z' = -y^{-2}\, y'$ e quindi

$$-z' = \frac{x}{1-x^2}\, z + \frac{x}{1-x^2}$$

$$z' = \frac{x}{x^2-1} z + \frac{x}{x^2-1}$$

⇐ LA POSSO RISOLVERE CON LA FORMULA PER LE EQ. LINEARI

$$A(x) = \int \frac{x}{x^2-1} dx = \ln \sqrt{|x^2-1|} + K$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = \sqrt{|x^2-1|} \left\{ c + \int \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} dx \right\}$$

CASO $-1 < x < 1$

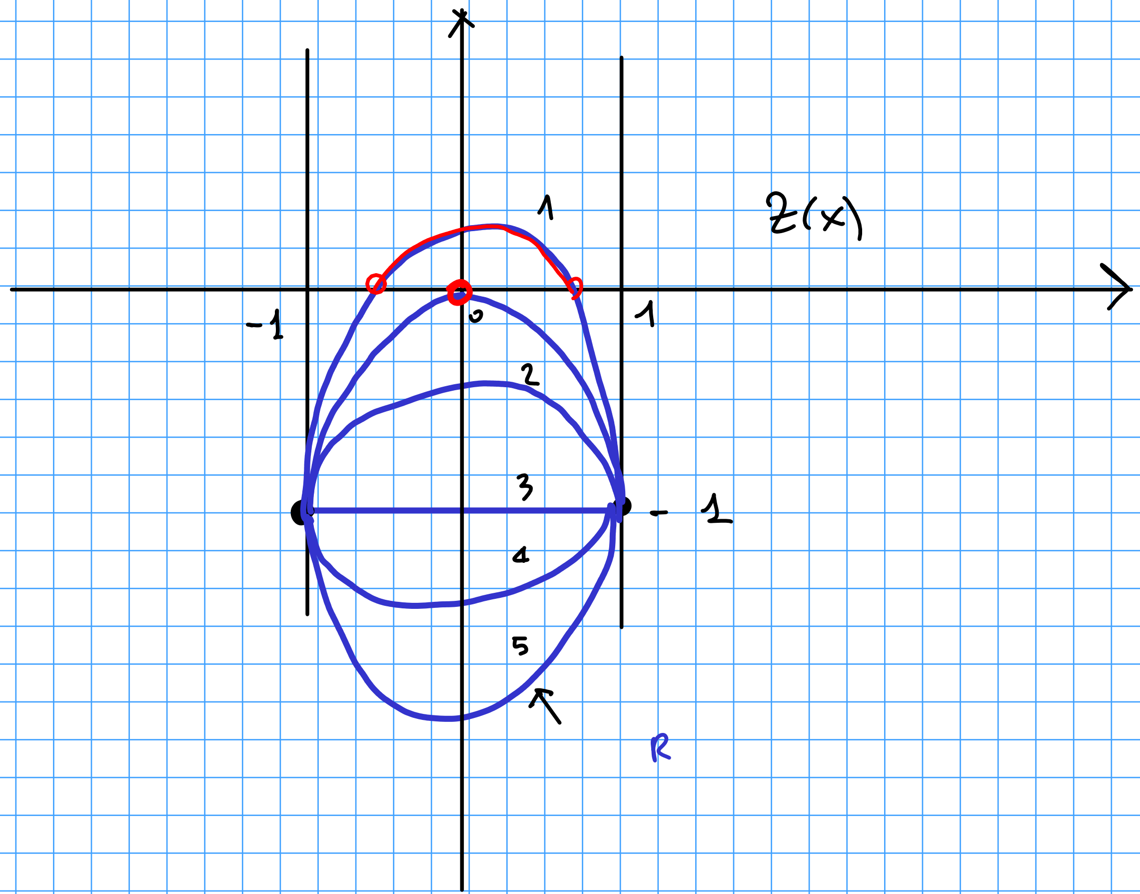
$$z(x) = \sqrt{1-x^2} \left\{ c - \int \frac{x}{1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right\} = (*)$$

$$(*) \quad \int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx =$$

$$1-x^2 = s \qquad -2x\,dx = ds \qquad dx = -\frac{1}{2} ds$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{s^{3/2}} ds = s^{-1/2} + K = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + K$$

$$z(x) = c\sqrt{1-x^2} - 1$$



IN MODO SIMILE SI FANNO GLI ALTRI INTERVALLI

NOTA: C'È "L'ESPLOSIONE" IN TEMPI FINITI

- SI POTEVA ANCHE RISOLVERE COME EQ. A VAR. SEPARABILI

ALTRO CASO CHE SI SA RISOLVERE:

$$y' = F(x, y)$$ con

F omogenea di grado zero: $F(tx, ty) = F(x, y)$
$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \quad F(x, y) = F_0\left(\frac{y}{x}\right)$$ $(x \neq 0)$ INFATTI

$$\| $$

$$F\left(x \cdot 1,\ x \cdot \frac{y}{x}\right) = F\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

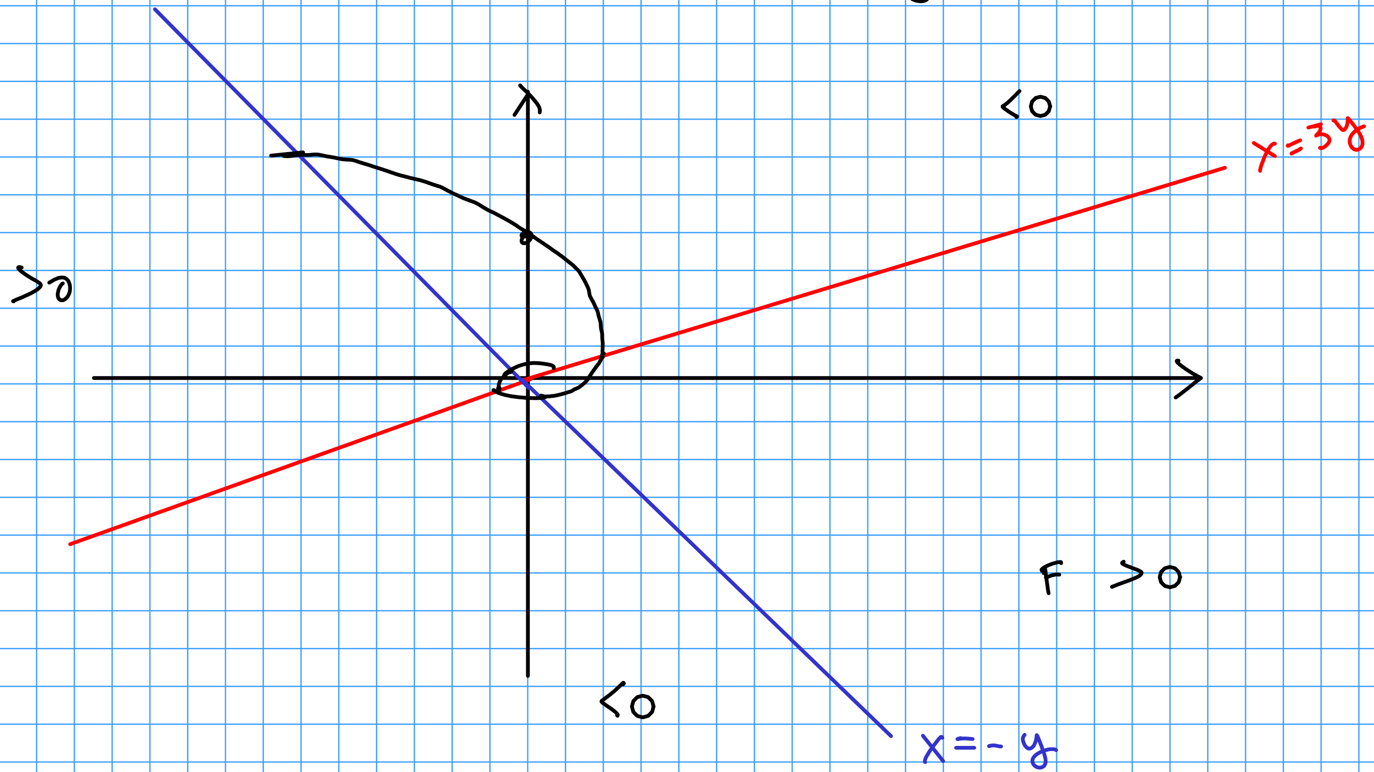
$$y' = F_0\left(\frac{y}{x}\right)$$. SI PONE $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad xz = y \quad \Leftrightarrow \quad (xz)' = y' \quad \Leftrightarrow \quad z + xz' = y'$$

$$\Leftrightarrow \quad z' = \frac{F_0(z) - z}{x}$$ $\leftarrow$ A VARIABILI SEPARABILI

ESEMPIO

$$y' = \frac{x+y}{x-3y}$$

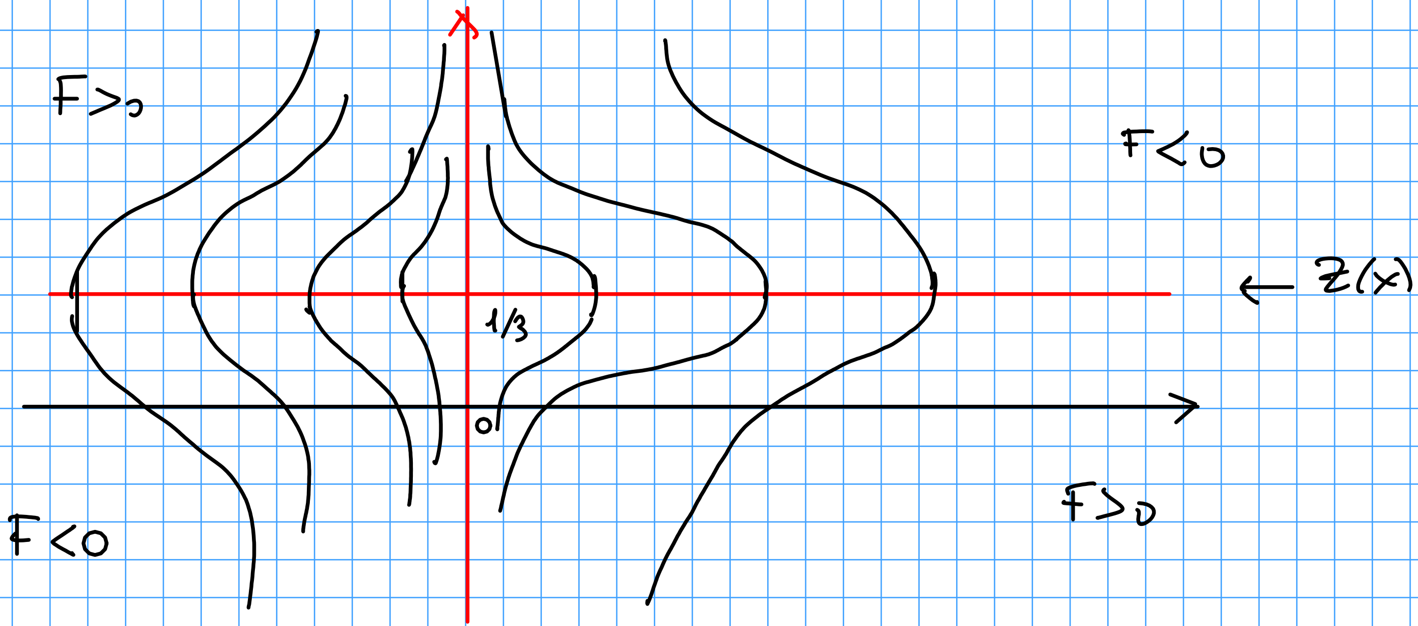


$$F(x,y) = \frac{x+y}{x-3y} = \frac{1+y/x}{1-3y/x}$$

$$z := \frac{y}{x} \qquad xz = y \qquad z + xz' = y'$$

$$xz' = \frac{1+z}{1-3z} - z \quad \left(= 1+z-z+3z^2 \right)$$

$$z' = \frac{1}{x} \, \frac{1+3z^2}{1-3z}$$



FACCIAMO I CONTI!

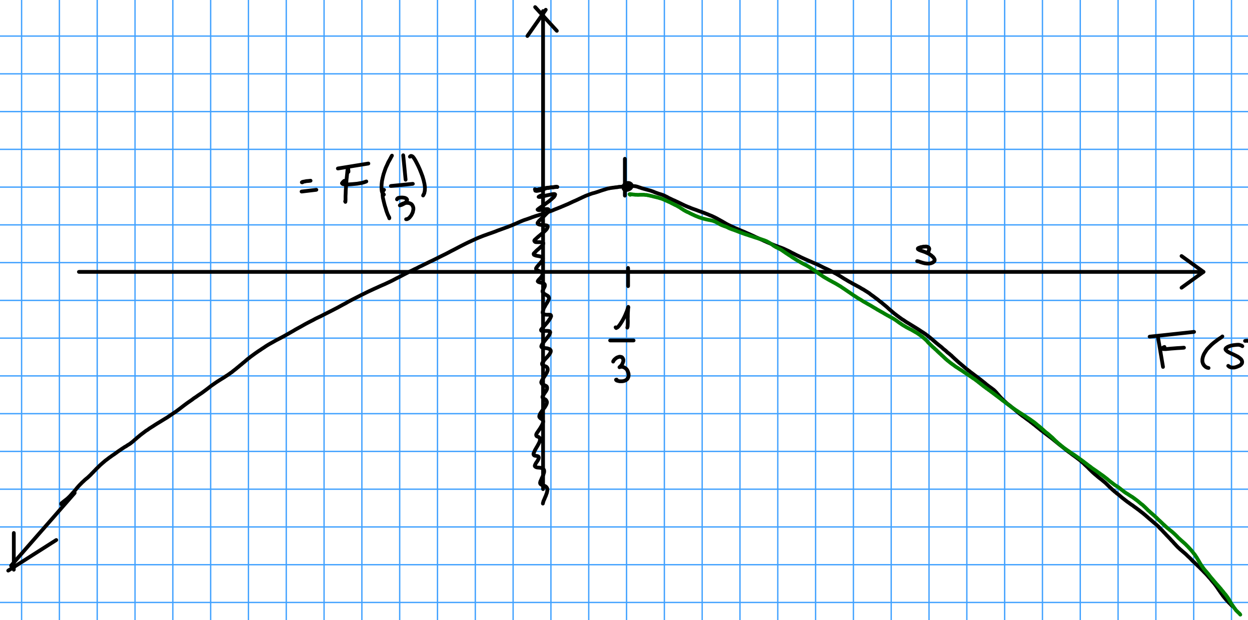
$$z' \, \frac{1-3z}{1+z^2} = \frac{1}{x}$$

$$\int_{z_0}^{z(x)} \frac{1-3s}{1+3s^2} \, ds = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right| \qquad (z(x_0)=z_0)$$

$$\|$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}\, s) - \frac{1}{2} \ln(1+3s^2)\right]_{z_0}^{z(x)} = F(z(x)) - F(z_0)$$

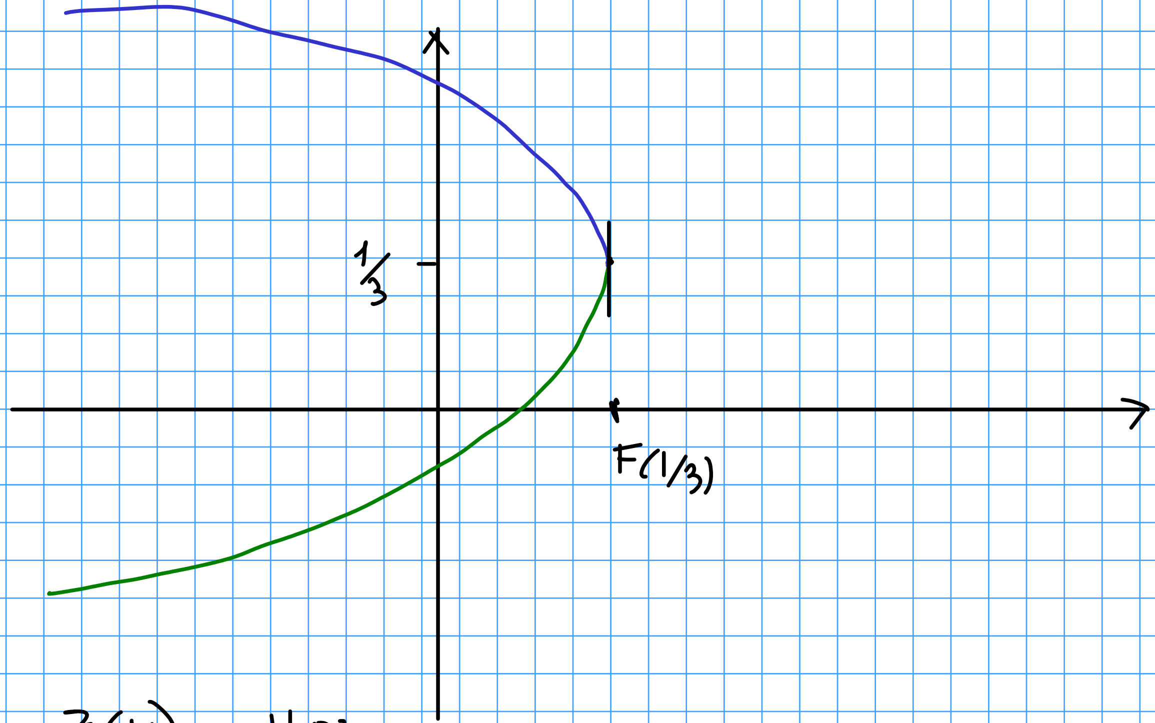
$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3}\,s - \ln\sqrt{1+3s^2}$$ ← FACCIAMO IL GRAFICO



$$\lim_{s\to+\infty} F(s) = -\infty = \lim_{s\to-\infty} F(s)$$

$$F'(s) = \frac{1-3s}{1+3s^2}$$

$\Rightarrow$ 2 POSSIBILI F^{-1} : $\left]-\infty, F\left(\frac{1}{3}\right)\right] \to \mathbb{R}$



SU $z(x)$ HO:

$$F(z(x)) - F(z_0) = \ln \frac{x}{x_0} \qquad z(x) = F^{-1}\Big(\underbrace{F(z_0) + \ln \frac{x}{x_0}}_{\leq 1/3}\Big)$$

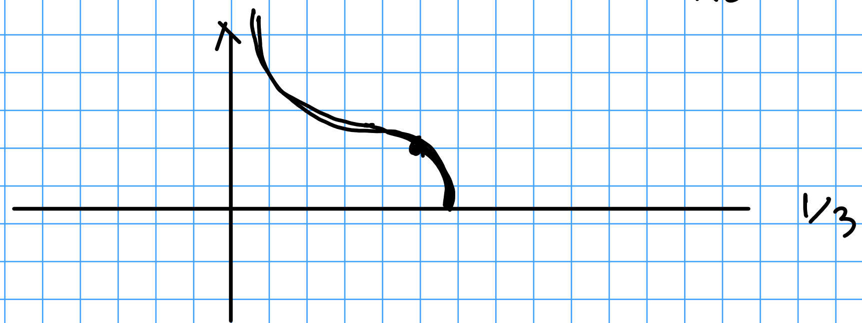
PRENDIAMO $z_0 > \frac{1}{3}$ (prendo la "F^{-1} BLU")

$$z(x) = F^{-1}\left(F(z_0) + \ln \frac{x}{x_0} \right)$$

se $x \to 0 \Rightarrow$

$\ln \frac{x}{x_0} \to -\infty$

$\Rightarrow F^{-1}(\,--\,) \to +\infty$



DUNQUE SE $x \to 0^-$ $\Rightarrow$ $z(x) \to \underline{\underline{+\infty}}$

TORNANDO ALLE $y(x)$ HO $y(x) = x\,z(x)$

DOVREBBE SUCCEDERE CHE $\lim_{x \to 0} x\,z(x)$ gusto finito $\Big\}\Big\}$ (*)

(è una forma indeterminata - PERò L'EQ. DI PARTENZA
NON HA PROBLEMI IN $x=0$, eccetto che per $y \sim 0$)

VICEVERSA "y HA DERIVATA VERTICALE" QUANDO

$$3\,y(x) = x \qquad \left(z(x) = \tfrac{1}{3} \right)$$

$$y' = \frac{x+y}{x-3y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-3y}$$

$$(x-3y)\,dy = (x+y)\,dx \qquad ??$$

IN REALTÀ MI SERVE UNA $\big(x(t), y(t)\big)$ ~~[illegible]~~ di

$$(x-3y)\underbrace{\dot{y}}_{=\frac{dy}{dt}} = (x+y)\underbrace{\dot{x}}_{=\frac{dx}{dt}} \qquad \leftarrow \text{EQUAZIONE RISPETTO A } t$$