Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 33, 17 dicembre 2013

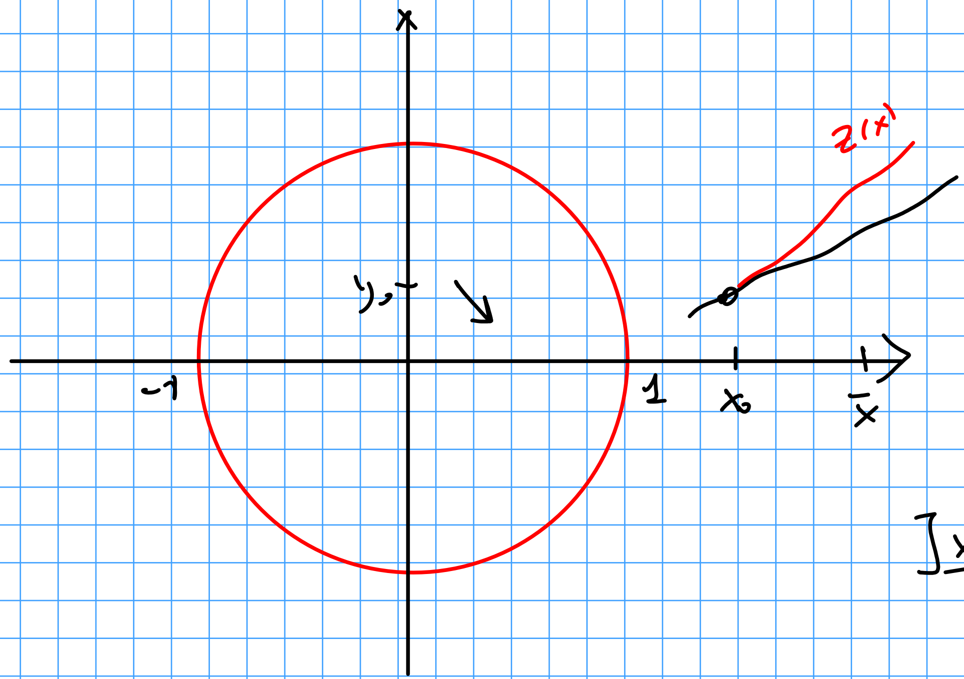
(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

$$y' = \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

DISCUTERE . . .

$\Downarrow$

$F(x,y)$ F è definito fuori da $S = x^2+y^2=1$



$F > 0$ "FUORI"

$F < 0$ "DENTRO"

$]\underline{x}\ \bar{x}[\leftarrow$ INTERVALLO MASS.
(dipende da (x_0, y_0))

- (x_0, y_0) FUORI $\Rightarrow \exists$ sol $y(x)$ con $y(x_0) = y_0$ definito vicino a x_0, CRESCENTE
- SE $x_0 \geq 1 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = +\infty}$

PER VEDERLO DIMOSTRO CHE " $y(x)$ NON DIVERGE

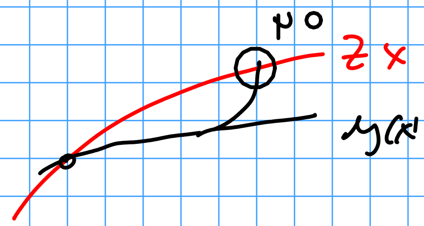
IN "TEMPO FINITO" IN EFFETTI, SE $X \geq 1$

$$\frac{1}{x^2+y^2-1} \leq \frac{1}{y^2}$$

Se risolvo $z' = \frac{1}{z^2}$ TROVO

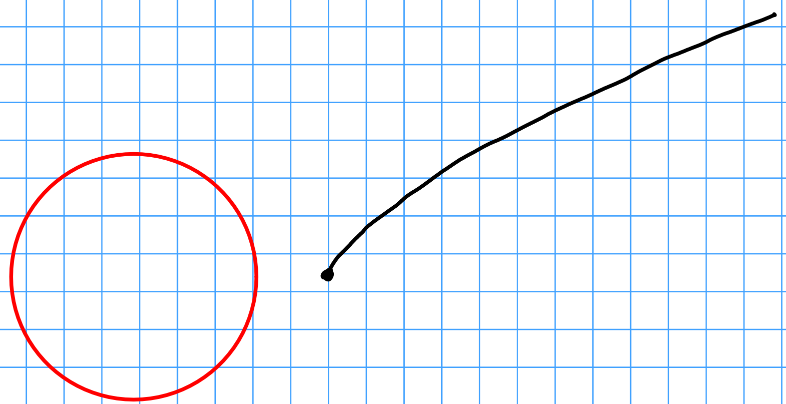
$$z' z^2 = 1 \Rightarrow \frac{z^3}{3} = x + c \quad \leftarrow \text{definito } \forall x > 0$$

$$z^3 = \sqrt[3]{3x+3c}$$



se $y(x_0) = z(x_0)$

PER CONFRONTO $\checkmark$ $y(x) \leq z(x)$ $\forall x \geq x_0$



sempre per $x_0 \geq 1$

DI SICURO $y(x) \to \ell \in [y_0, +\infty]$

$$\boxed{\ell = ??}$$

SO CHE $y_0 \le y(x) \le \ell$

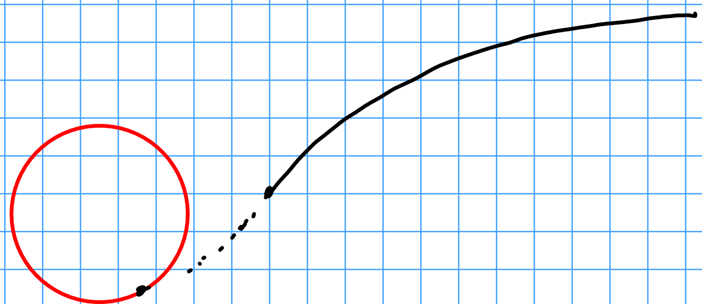
$$\frac{1}{\ell^2+x^2-1} \le \underbrace{\frac{1}{y^2+x^2-1} \le \frac{1}{y_0^2+x^2-1}}_{(*)}$$

Se risolvo $z' = \dfrac{1}{x^2+a^2}$, $z(x_0)=y_0$ $\qquad \left(a^2 = y_0^2 - 1 > 0\right)$

$$\Rightarrow \quad z(x) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

MA $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} z(x) = \frac{\pi}{2a} + c \in \mathbb{R}$

DA $(*)$ $\Rightarrow$ $y(x) \le z(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) < +\infty}$



• COSA POSSO DIRE DI $\underline{x}$??

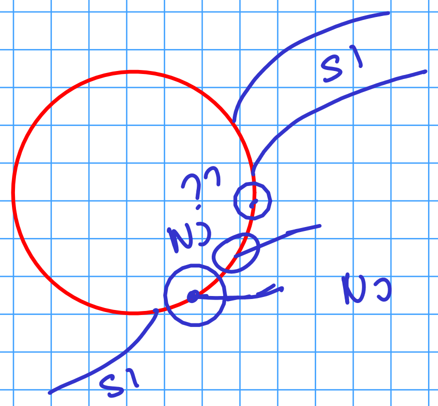
COME FATTO NEL PUNTO PRECEDENTE SI VEDE CHE NON PUÒ SUCCEDERE $\lim_{x \to \underline{x}^+} y(x) = -\infty$

RIMANGONO DUE CASI:

(a) $\underline{x} = -\infty$

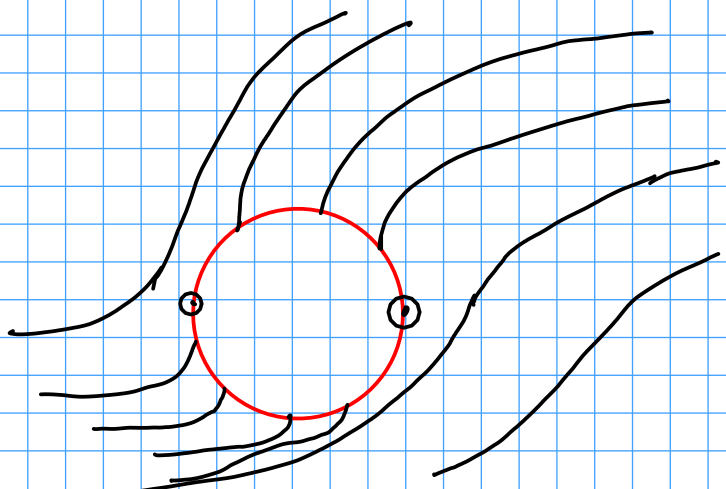
(b) $\underline{x} > -\infty$ e però $\lim_{x \to \underline{x}^+} y(x) = \underline{y}$ tale che

$(\underline{x}, \underline{y}) \in S$



QUESTO CASO (b) NON PUÒ VERIFICARSI IN PUNTI CON $\underline{y} < 0$. $y(x)$ dovrebbe tendere a $\underline{y}$ "stando sotto" la circonferenza $\Rightarrow y' < +\infty$ mentre l'equazione dice che

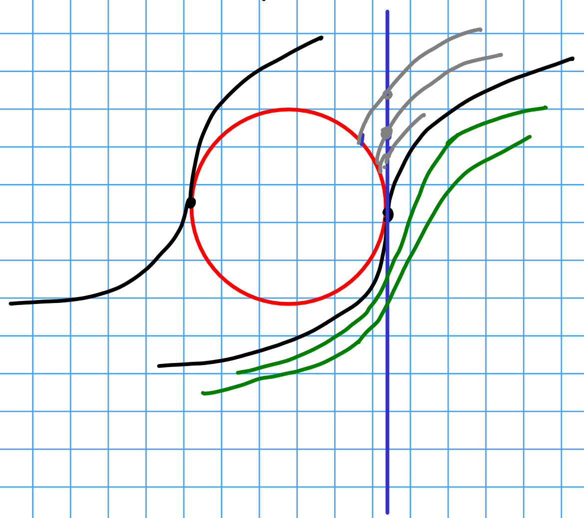
$y'(x) \to +\infty$ se $x \to \underline{x}$



ALLA FINE SI VEDE CHE SE (x_0, y_0) FUORI $\Rightarrow y(x)$ SI COMPORTA COME A SX

NON È CHIARO COSA SUCCEDE VICINO A $(-1,0)$ e $(1,0)$

- IN REALTÀ DEVONO ESISTERE DUE CURVE COME NEL DISEGNO

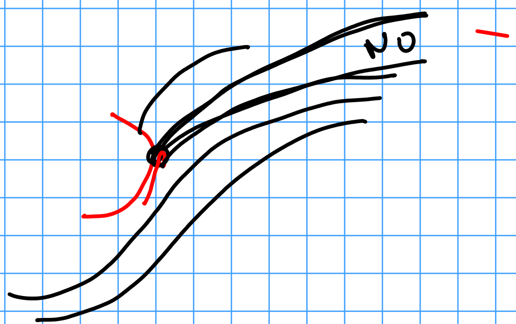


MI METTO IN $x_0 = 1$ $y_0 > 0$ y_0 vicino a zero; le corrispondenti $y(x)$ tendono a un arco che parte da $(1,0)$

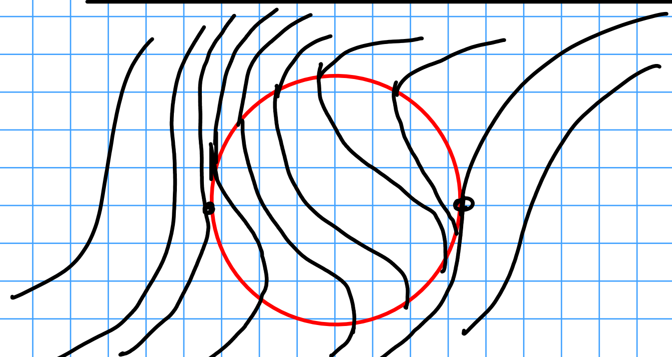
- STESSO DISCORSO con $y_0 < 0$

$y_0 \to 0$

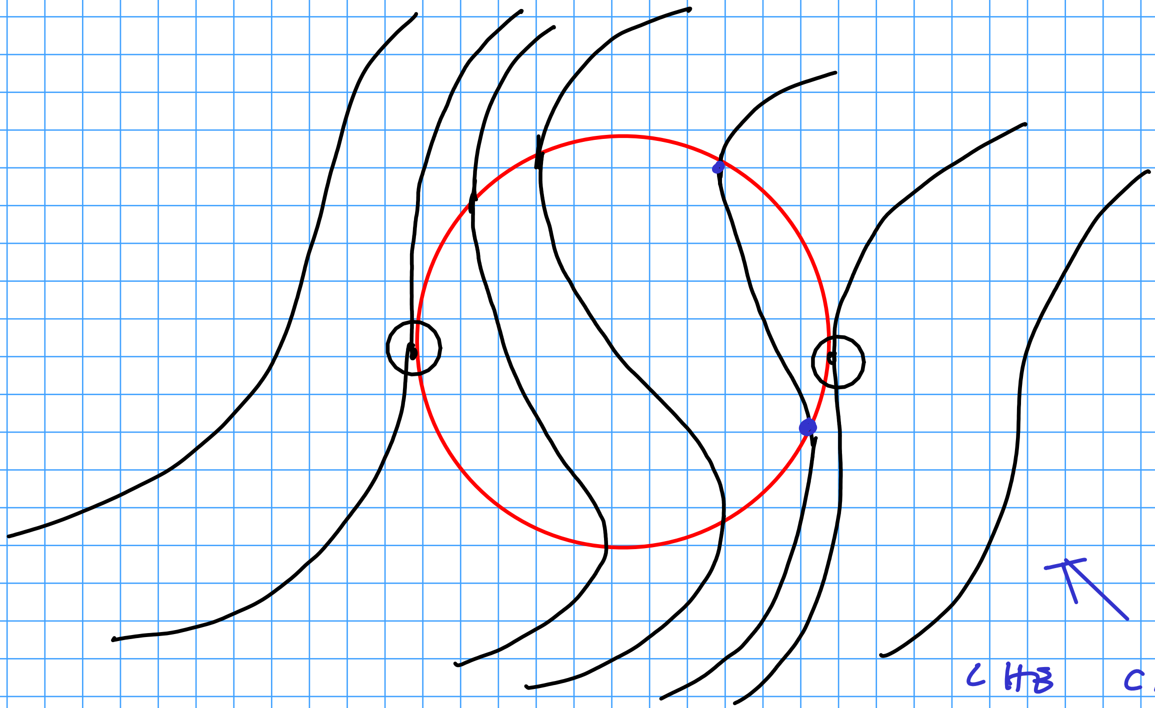
NON PUÒ RIMANERE SPAZIO IN MEZZO



(FIDUCIA...)



DENTRO

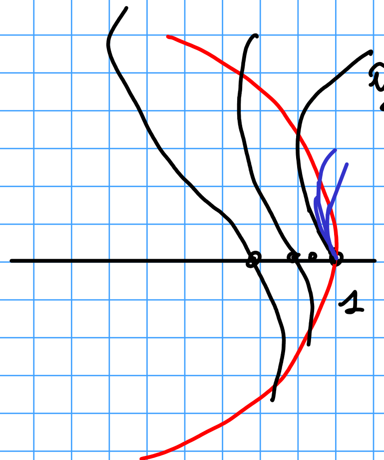


SITUAZIONE COMPLESSIVA

(OGNI CURVA HA LIMITE FINITO A $+\infty$ / $-\infty$)

HO ESCLUSO CHE CAPITI QUANTO SCRITTO SOTTO

DOMANDA PRENDIAMO $x_0 < 1$ $\quad x_0 \to 1$



RISOLVIAMO CON CONDIZIONE $y(x_0) = 0$

AL LIMITE TROVO UNA $\tilde{y}$ che verifica $\tilde{y}(1) = 0$

PUÒ ESSERE COME NEL DISEGNO!

SE SUCCEDE QUESTO CI SONO DELLE CURVE (BLU) CHE VANNO TUTTE IN $(1,0)$

IO DIRεI CHE NON SUCCEDE — PERÒ . . .