Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 32, 16 dicembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

SISTEMA LINEARE:

$$(E) \quad Y' = A(x)\,Y + B(x)$$

dove $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ (matrici $N\times N$)

$B : I \to \mathbb{R}^N$

CONTINUE SU UN INTERVALLO $I \subset \mathbb{R}$

SE $B=0$ l'equazione si dice omogenea.

- TH. DI CAUCHY $\Rightarrow$ esistenza locale per il pb. di Cauchy:

$$(P) \quad \begin{cases} Y' = A(x)\,Y + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

comunque presi $x_0 \in I$ e $Y_0 \in \mathbb{R}^N$. Cioè

$\exists\ \delta > 0$ e $\exists\ Y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}^N$ che verifica (P).

- LA STIMA "ESPONENZIALE" VISTA $\Rightarrow$

$\forall x_0 \in I \Rightarrow$ L'INTERVALLO MASSIMALE COINCIDE CON I

(dunque $Y: I \to \mathbb{R}^N$)

STRUTTURA delle soluzioni

- Y_1, Y_2 sol. dell' omogeneo $\Rightarrow \lambda Y_1 + \mu Y_2$ è sol dell'omogeneo

- Se Y è sol di (E) e Y_0 è sol. dell'omogenea $\Rightarrow Y + Y_0$ è sol di (E)

- Y_1 e Y_2 sono sol. di $(E) \Rightarrow Y_1 - Y_2$ è sol. dell'omogenea

- Lo spazio

$$\mathcal{S}_0 = \{ Y : I \to \mathbb{R}^N, \text{ sol. dell'omogeneo} \}$$

SI HA CHE $\mathcal{S}_0$ è uno spazio lineare di dim N.

DIM. Fisso $x_0 \in I$. Siano

$\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_N$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^N$

$$\hat{E}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posto } i\text{-esimo}$$

Prendiamo $\hat{Y}_i$ soluzione di:

$$\hat{Y}_i' = A(x)\hat{Y}_i \qquad \text{(omogenea)}$$
$$\hat{Y}(x_0) = \hat{E}_i$$

(a) $\hat{Y}_1 \dots \hat{Y}_N$ sono lin. indipendenti. Siano $\lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{N}$

e sia $\hat{Y} = \lambda_1 \hat{Y}_1 + \dots + \lambda_N \hat{Y}_N$ e supponiamo che

$\hat{Y}(x) = 0 \quad \forall x \in I$, in particolare

$\hat{Y}(x_0) = 0$ cioè $\lambda_1 \hat{E}_1 + \dots + \lambda_N \hat{E}_N = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0}$ ($\hat{E}_1 \dots \hat{E}_N$ sono lin. ind.)

(b) $\hat{Y}_1 \dots \hat{Y}_N$ generano $\mathcal{S}_0$. Prendiamo $Y \in \mathcal{S}_0$

cioè prendiamo una sol. di $Y' = A(x)\, Y$.

Sia $Y_0 \equiv Y(x_0) \in \mathbb{R}^N$; posso trovare $\lambda_1 \dots \lambda_N$ t.c.

$$Y(x_0) = \lambda_1 \hat{E}_1 + \dots + \lambda_N \hat{E}_N$$

Prendiamo $\overline{Y}(x) = \lambda_1 \hat{Y}_1 + \dots + \lambda_N \hat{Y}_N$

Chiaramente $\overline{Y}(x)$ è una soluzione dell'omogenea

Inoltre $\overline{Y}(x_0) = \lambda_1 \hat{E}_1 + \dots + \lambda_N \hat{E}_N = Y(x_0)$

Per il Th. di Cauchy (UNICITÀ) $\Rightarrow \overline{Y}(x) = Y(x) \quad \forall x \in I$

e cioè $\underbrace{Y(x) = \lambda_1 \hat{Y}_1 + \dots + \lambda_N \hat{Y}_N}$

DUNQUE $\mathcal{S}_0$ HA DIMENSIONE N

- Se $\overline{Y}$ è una sol. di (E), allora se diciamo

$\mathcal{S} = \{$sol. di (E)$\}$, si ha

$\mathcal{S} = \overline{Y} + \mathcal{S}_0$, CHE SIGNIFICA

- $\forall\ Y \in \mathcal{S}\quad \exists$ (UNICA) $Y_0 \in \mathcal{S}_0$ t.c. $Y = \bar{Y} + Y_0$

e VICEVERSA:

$\forall\ Y_0 \in \mathcal{S}_0 \qquad Y_0 + \bar{Y} \in \mathcal{S}$

"$\mathcal{S}$ è uno spazio affine, ottenuto traslando $\mathcal{S}_0$ mediante $\bar{Y}$"

Data una matrice A $(N \times N)$ posso considerare

"$e^A := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m$" $\leftarrow \lim_{K \to \infty} \sum_{m=0}^{K} \frac{1}{n!} A^n$

NOTA CHE LE MATRICI SONO VETTORI $N \times N$ e quindi

posso considerare $\|A\|_* = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^2}$

OPPURE ANCHE $\boxed{\|A\| = \max_{\|x\|=1} Ax}$

AVENDO LA NORMA POSSO DEFINIRE IL LIMITE

(SI VEDE CHE LE DUE NORME SOPRA SONO EQUIVALENTI

PER DEFINIRE IL LIMITE)

SI SCOPRE CHE e^A esiste $\forall$ matrice A e che

$$\| e^A \| \leq e^{\|A\|}$$

(c'è solo una nozione di conv. assoluta :

$$\sum A_n \text{ converge } \Leftarrow \sum \|A_n\| \text{ converge }$$)

• NOTA $e^0 =$ Identità

• SI VEDE ANCHE CHE

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \qquad \text{SE } A \cdot B = BA$$

• INOLTRE SE

$F(x) = e^{xA}$ ($F(x)$ è una matrice, $\forall x \in \mathbb{R}$)

ALLORA $F'(x) = A\,F(x)$

IDEA DI DIM.

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$; AMMETTIAMO DI POTER

" DERIVARE SOTTO IL SEGNO DI SERIE "

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} A^n =$$

$$A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = A\, F(x)$$

USANDO LA MATRICE ESPONENZIALE TROVO UNA RAPPRESENTAZIONE DELLA SOL. DI (E)

$$Y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} A(t)\,dt} \left\{ Y_0 + \int_{x_0}^{x} B(t)\, e^{-\int_{x_0}^{t} A(\tau)\,d\tau} \right\}$$

$$= e^{\mathcal{A}(x)} \left\{ Y_0 + \int_{x_0}^{x} B(t)\, e^{-\mathcal{A}(t)}\, dt \right\}$$

$$\mathcal{A}(x) := \int_{x_0}^{x} A(\tau)\,d\tau$$

<u>DIM.</u> Prendiamo $\mathcal{A}(x) = \int_{x_0}^{x} A(\tau)\,d\tau$

cioè $\mathcal{A}(x_0) = 0$ e $\mathcal{A}'(x) = A(x)$

Supponiamo di

$$Y' = A(x)\,Y(x) + B(x)$$

moltiplico a dx per $e^{-\mathcal{A}(x)}$: NOTA CHE

$$\frac{d}{dx} e^{-\mathcal{A}(x)} = \mathcal{A}'(x)\,e^{-\mathcal{A}(x)} = A(x)\,e^{-\mathcal{A}(x)}$$

(TUTTE MATRICI)

$$\underbrace{Y'(x) \cdot e^{-\mathcal{A}(x)} - A(x)\,Y(x)\,e^{-\mathcal{A}(x)}}_{\left(Y(x)\,e^{-\mathcal{A}(x)}\right)'} = B(x)\,e^{-\mathcal{A}(x)}$$

$$\left(Y(x)\,e^{-\mathcal{A}(x)}\right)' = B(x)\,e^{-\mathcal{A}(x)}$$

SE INTEGRO TRA x_0 e x TROVO LA FORMULA

$$Y(x) = e^{\mathcal{A}(x)}\left\{ Y_0 + \int_{x_0}^{x} B(t)\, e^{-\mathcal{A}(t)}\, dt \right\}$$

$$\mathcal{A}(x) := \int_{x_0}^{x} A(\tau)\, d\tau$$

SE $N=1$ — sono tutti numeri — ritroviamo la formula dell'anno scorso

NOTA: $\hat{Y}_i = e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-esimo

$$\overline{Y}(x) = e^{\mathcal{A}(x)} \int_{x_0}^{x} B(t)\, e^{-\mathcal{A}(t)}\, dt \quad \text{è}$$

la sol. particolare con $\overline{Y}(x_0) = 0$

E' INTERESSANTE IL CASO $\underbrace{A(x) = A}$ costante

i SISTEMA DI N. EQ. A coeff. costanti

$$Y' = AY + B(x)$$

$\Rightarrow$ la formula diventa:

METTIAMO $x_0 = 0$ (per esempio)

$$Y(x) = e^{xA}\left(Y_0 + \int_0^x B(t)\, e^{-tA}\, dt\right)$$

IL CALCOLO DI e^{xA} DIVENTA FACILE SE

- A è diagonale: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{xA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N x} \end{pmatrix} \Leftarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N^n \end{pmatrix}$$

- A "DIAGONALIZZABILE": $\exists\, N$ invertibile

$$\boxed{A = N D N^{-1}} \quad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Allora

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(N D N^{-1}\right)^n$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{m!} N D^n N^{-1} = N \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{m!} D^n \right) N^{-1} =$$

$$\left((NDN^{-1})^n = \underbrace{(ND\cancel{N}^{-1})(\cancel{N}DN^{-1}) \cdots (\cancel{N}DN^{-1})}_{m \text{ volte}} = ND^n N^{-1} \right)$$

$$N \begin{pmatrix} e^{x\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{x\lambda_n} \end{pmatrix} N^{-1}$$

SE USO QUESTA INFORMAZIONE SULLA SOL. DI (E).

$$Y(x) = N e^{xD} N^{-1} \left(Y_0 + \int_{x_0}^{x} B(t) N e^{-tD} N^{-1} dt \right)$$

PONGO $\boxed{Z(x) = N^{-1} Y(x), \quad Z_0 = N^{-1} Y_0}$

$$Z(x) = e^{xD} \left(Z_0 + \int_0^x \underbrace{N^{-1} B(t) N}_{B_1(t)} e^{-tD} N^{-1} \right)$$

METTIAMO CHE B SIA zero (OMOGENEO)

HO TROVATO $Z = e^{xD} Z_0$ cioè

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1(x) = z_{0,1}\, e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ z_N(x) = z_{0,n}\, e^{\lambda_N x} \end{cases}$$

SI PUÒ FARE QUALCOSA ANCHE SE

$$A = N\, T\, N^{-1}$$

CON T MATRICE TRIANGOLARE

RICORDIAMO CHE: A simmetrica $\Rightarrow$ A diagonalizzabile. (e anzi: N e N^{-1} sono una la trasposta dell'altra — gli autovettori sono ortogonali.

ESEMPIO ($N=2$)

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 3y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$ simmetrico.

CERCO GLI AUTOVALORI $\quad (2-\lambda)(-1-\lambda) - 9 = 0$

$$\lambda^2 - \lambda - 11 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

AUTOVETTORI :

$$\begin{cases} 2x + 3y = \frac{1+3\sqrt{5}}{2} x \\ 3x - y = \frac{1+3\sqrt{5}}{2} y \end{cases} \qquad 3y = \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2} - 2\right) x$$

$$\Updownarrow$$

$$3y = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} x$$

$$2y = (\sqrt{5}-1) x$$

UN AUTOVETTORE È $\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} = e_1$

L'ALTRO AUTOVETTORE È $\begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ -2 \end{pmatrix} = e_2$

NORMALIZZIAMOLI

$$\|e_1\|^2 = \|e_2\|^2 = 4 + (\sqrt{5}-1)^2 = 4 + 5 + 1 - 2\sqrt{5} = 10 - 2\sqrt{5}$$

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5}-1 \\ \sqrt{5}-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$N^{-1} = N^t$ (facendo i calcoli) ---- si ricavano $y_1(t)$ e $y_2(t)$

L'EQ. scalare di ordine N

$$\cancel{a_N}\, y^{(N)} + \dots + a_0 y = b(x)$$

SI PUÒ SEMPRE TRASFORMARE IN UN SISTEMA DI ORDINE 1 SE $a_N = 1$

$$v_1 = y$$
$$v_2 = y'$$
$$v_3 = y''$$
$$\vdots$$
$$v_N = y^{(N-1)}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

ALLORA

$$V' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \\ v_N' \end{pmatrix} = \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ -a_{N-1} v_N - a_{N-2} v_{N-1} - \dots - a_0 v_1 - b(x) \end{matrix}$$

$$= A(x) V + B(x)$$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \\ -a_{N-1}, & \dots & , & -a_0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b(x) \end{pmatrix}$$

LA TEORIA DI ORDINE N SI RICONDUCE ALL'ORDINE 1