Analisi Matematica II

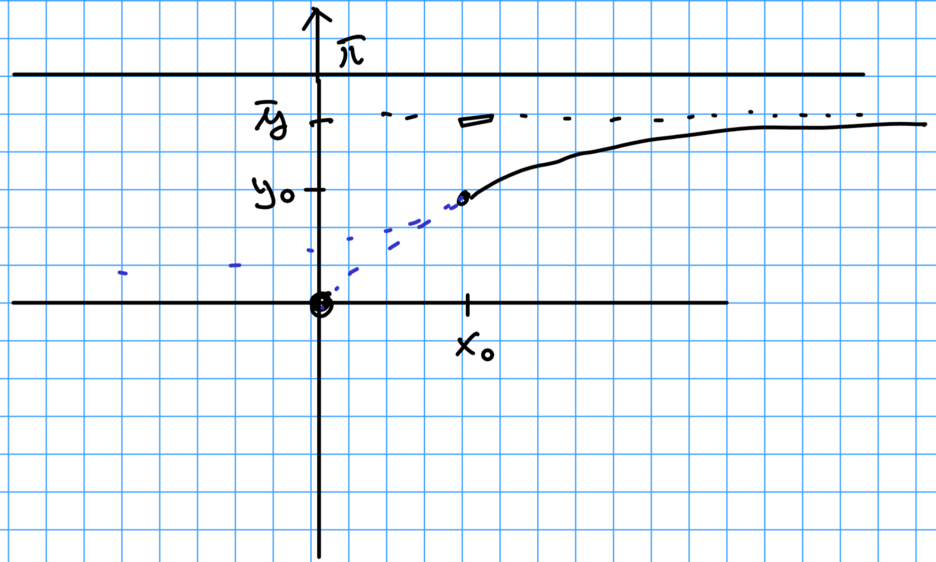
prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 31, 11 dicembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

$$y' = \frac{\sin(y)}{x^2+y^2}$$

?? COSA SUCCEDE IN $(0,0)$??



- $x_0 > 0 \quad 0 < y_0 < \pi \implies \bar{X} = +\infty$ e $\lim_{x \to \bar{x}} y(x) = \bar{y} < \pi$
- cosa posso dire di $\underline{x}$: due possibilità: $\underline{x} = -\infty$ / OPPURE $\underline{x} = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0$ IN ENTRAMBI I CASI $y(x)$ è definita per $x > 0$

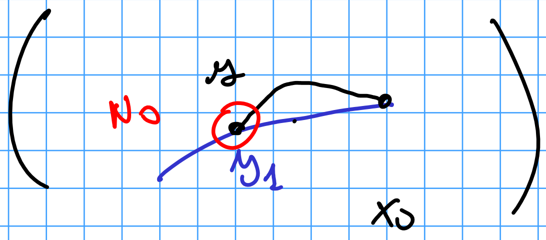
PER DIMOSTRARE CHE $\underline{x} = -\infty$ dovrei trovare un motivo per cui $\lim_{x \to 0^+} y(x) > 0$ (IL LIMITE ESISTE PERCHÉ y CRESCE)

PER QUESTO POSSO CERCARE UNA y_1 soluzione di un'equazione più semplice $y_1' = F_1(x, y_1)$ con

$$F_1(x,y) > \frac{\sin(y)}{x^2+y^2}, \quad y_1(x_0) = y_0$$

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ $y(x) \le y_1(x)$ $\quad \forall x \le x_0$

()

CHE F_1 posso prendere?? SO CHE $0 < y(x) \le y_0$

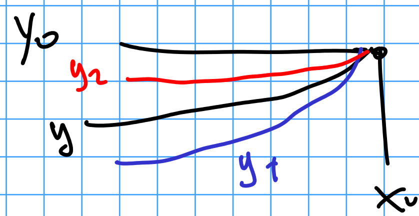
$\Rightarrow$ posso prendere $\quad F_1(x,y) = \dfrac{\sin(y)}{x^2}$

(viceversa se prendo $F_2(x,y) = \dfrac{\sin(y)}{x^2+y_0^2}$ $\Rightarrow$

$$F_2(x,y) \le \frac{\sin(y)}{x^2+y^2}$$

e quindi la y_2 che risolve $y_2' = F_2(x,y)$ è

$y_2(x) \ge y(x) \quad \forall x \le x_0$)



COSA FA y_1?? $\qquad y_1' = \dfrac{\sin(y_1)}{x^2}$

$$\int_{y_0}^{y_1(x)} \frac{ds}{\sin(s)} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{x_0}^{x} =$$

$$\left[\ln\left(\tan\left(\frac{s}{2}\right)\right)\right]_{y_0}^{y_1(x)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$$

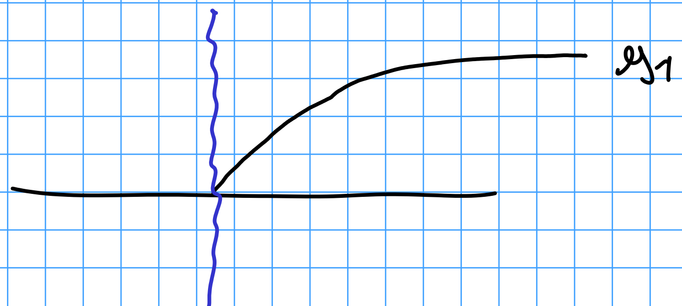
$$\ln \frac{\tan\left(\frac{y_1(x)}{2}\right)}{\tan\left(\frac{y_0}{2}\right)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$$

$$\tan\left(\frac{y_1(x)}{2}\right) = \tan\left(\frac{y_0}{2}\right) e^{\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right)}$$

$$y_1(x) = 2\,\operatorname{atan}\left(\tan\left(\frac{y_0}{2}\right) e^{\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right)}\right)$$

ESISTE $\iff x > 0$

$$\lim_{x \to 0} y_1(x) = 0$$

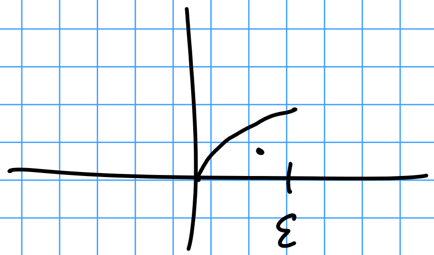


NON CI SERVE A DIRE CHE $\lim_{x\to 0^+} y(x) > 0$!!

SCOMMETTIAMO SUL FATTO CHE $y(x) \to 0$

— ALMENO PER CERTI x_0 —

UN MODO DI TROVARE QUESTO COMPORTAMENTO È IL SEGUENTE: COSTRUIRE UNA FUNZIONE $\bar{y}$ DEFINITA IN $[0, \varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$ CON $\bar{y}(0) = 0$



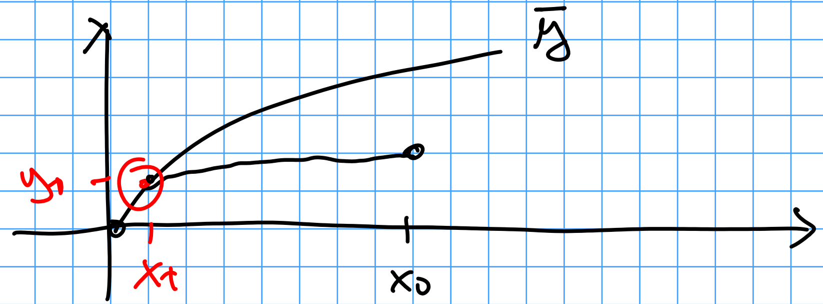
$$\boxed{\bar{y}'(x) < \frac{\sin(\bar{y}(x))}{x^2 + \bar{y}(x)^2}} = F(x, \bar{y}(x))$$

SUPPONIAMO DI RIUSCIRE A TROVARE UNA TALE $\bar{y}$

ALLORA SE PRENDO $0 < x_0 < \varepsilon$ e

$0 < y_0 < \bar{y}(x_0) \Rightarrow$ LA CORRISPONDENTE $y(x)$

(sol. dell eq. iniziale con pto iniziale (x_0, y_0)), deve verificare $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0$



SE CI FOSSE UN PUNTO $x_1 \in]0, x_0[$ IN CUI $\bar{y}(x_1) = y(x_1) = y_1$

E $\bar{y}(x) > y(x) \quad \forall x > x_1$. IN QUESTO x_1

$$\bar{y}'(x_1) \qquad\qquad y'(x_1)$$
$$\wedge \qquad\qquad\qquad \parallel$$
$$F(x_1\ y_1) \qquad\qquad F(x_1\ y_1) \qquad \Longrightarrow \bar{y}'(x_1) < y'(x_1)$$

$\Longrightarrow$ per le $x > x_1$, VICINO A x_1 $\bar{y}(x) < y(x)$

<u>ASSURDO</u>.

UNA TALE $\bar{y}$ È "UNA BARRIERA" PER LE y

VEDIAMO SE TROVO $\bar{y}(x)$.

PROVIAMO CON $\boxed{\bar{y}(x) = \gamma x^{\alpha}}$ con $\gamma > 0$ e $\alpha > 0$

$$\boxed{\bar{y}'(x) < \frac{\sin(\bar{y}(x))}{x^2 + \bar{y}(x)^2}}$$

$$F(x, \bar{y}(x)) = \frac{\sin(\gamma x^\alpha)}{x^2 + \gamma^2 x^{2\alpha}} \simeq \frac{\gamma x^\alpha}{\gamma^2 x^{2\alpha}} = \frac{1}{\gamma} x^{-\alpha}$$

se $\alpha < 1$ $(\Rightarrow x^2 = o(x^{2\alpha}))$

$$\bar{y}'(x) = \gamma \alpha x^{\alpha-1}$$

VOGLIO DUNQUE $x^{\alpha-1} < x^{-\alpha}$ per $x \sim 0$

$x^{2\alpha-1} < 1$ $\quad 2\alpha - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > \frac{1}{2}$

IN EFFETTI POSSO PRENDERE $\bar{y}(x) = x$

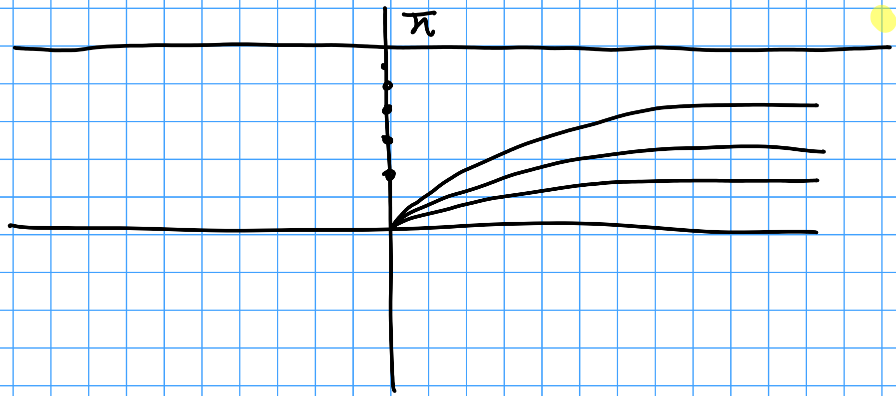
(CONTROLLO : $F(x, x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + x^2} \simeq \frac{1}{x}$

$\bar{y}'(x) = 1$

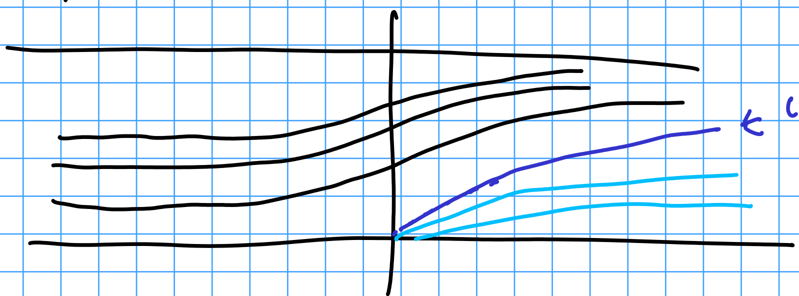
e $1 < \frac{1}{x}$ se $x \sim 0$

QUINDI ESISTE QUESTA $\bar{y}$ $\Rightarrow$

• CI SONO DEI PUNTI (x_0, y_0) PER CUI $y(x)$ HA $\underline{x=0}$ e tende a zero quando $x \to 0^+$

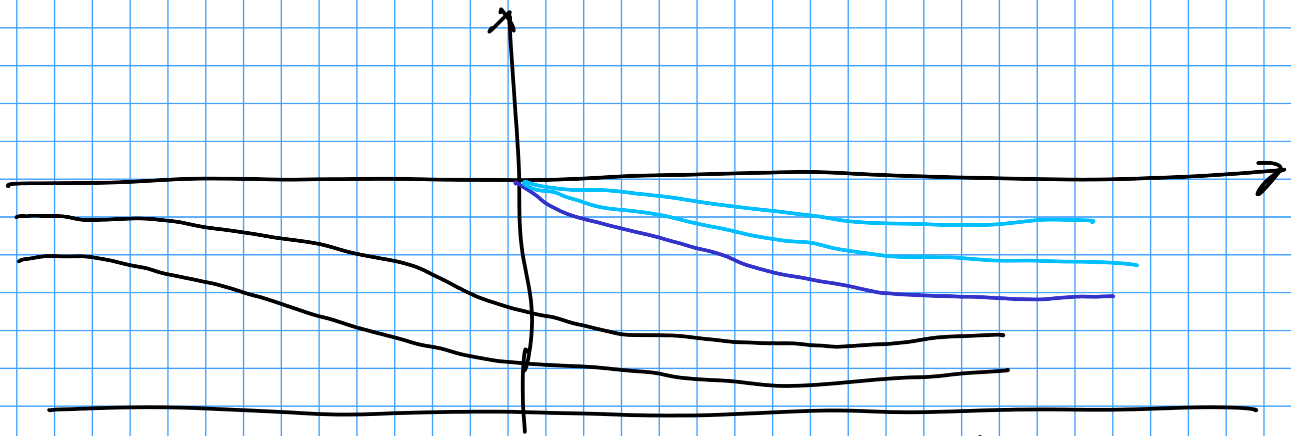


• PERALTRO SE PRENDO $(x_0, y_0) = (0, y_0)$ con $y_0 > 0$ LE CORRISPONDENTI SOLUZIONI SONO DEFINITE SU TUTTO $\mathbb{R}$



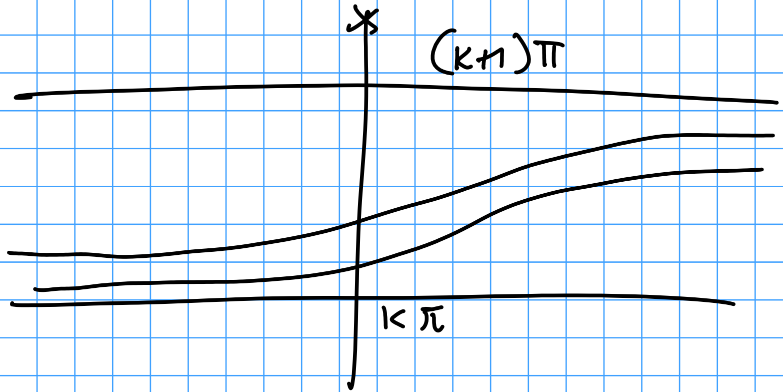
• SI PUÒ ANCHE MOSTRARE CHE, se parto da $x_0 = 0$, $y_0 > 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to -\infty} y(x) > 0$ (usando le soluzioni di $y' = \frac{\sin(y)}{x^2 + a^2}$ per stimare $y(x)$ "da sotto")

- NELLA STRISCIA DI SOTTO $-\pi < y_0 < 0$ il $\sin(y)$ diventa < 0. LA SITUAZIONE È



$(k \neq 0, k \neq -1)$

- IN $k\pi < y_0 < (k+1)\pi$ LA SITUAZIONE È PIÙ SEMPLICE



$(\sin > 0)$

CONSIDERIAMO IL CASO LINEARE

$$Y'(x) = A(x) \cdot Y(x) + B(x)$$

Dove $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{pmatrix}$ ← vettore di $\mathbb{R}^N$

$B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{SE } B = 0 \text{ L'EQ. SI DICE OMOGENEA}}$

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1N}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1}(x) & & a_{NN}(x) \end{bmatrix}$$ ← matrice $N \times N$

IN SOSTANZA HO UN SISTEMA:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)\, y_1(x) + \dots + a_{1N}(x)\, y_N(x) + b_1(x) \\ \vdots \\ y_N'(x) = a_{N1}(x)\, y_1(x) + \dots + a_{NN}(x)\, y_N(x) + b_N(x) \end{cases}$$

SUPPONIAMO SEMPRE CHE A e B siano continue.

$\Leftarrow$ $a_{ij}(x)$ continue, $b_i(x)$ continue in $x \in I$ $\leftarrow$ INTERVALLO)

QUESTO CASO RIENTRA NEL TEOREMA DI CAUCHY CON.

$$\Omega = I \times \mathbb{R}^N$$

$$F(x, Y) = A(x) \cdot Y + B(x)$$

• Si vede che, se $[a,b] \subset I$ $\Rightarrow$

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^N$$

$$\| F(x, Y_1) - F(x, Y_2) \|_{\mathbb{R}^N} = \| A(x) \cdot (Y_1 - Y_2) \|_{\mathbb{R}^N} \leq$$

$$\| A(x) \| \cdot \| Y_1 - Y_2 \|_{\mathbb{R}^N} \quad \left(\leq \left(\max_{i,j} |a_{ij}(x)| \right) \| Y_1 - Y_2 \|_{\mathbb{R}^N} \right)$$

$$\left(\| A \| = \max_{\|x\|=1} \| A \cdot x \|_{\mathbb{R}^N} = \max_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} \right.$$

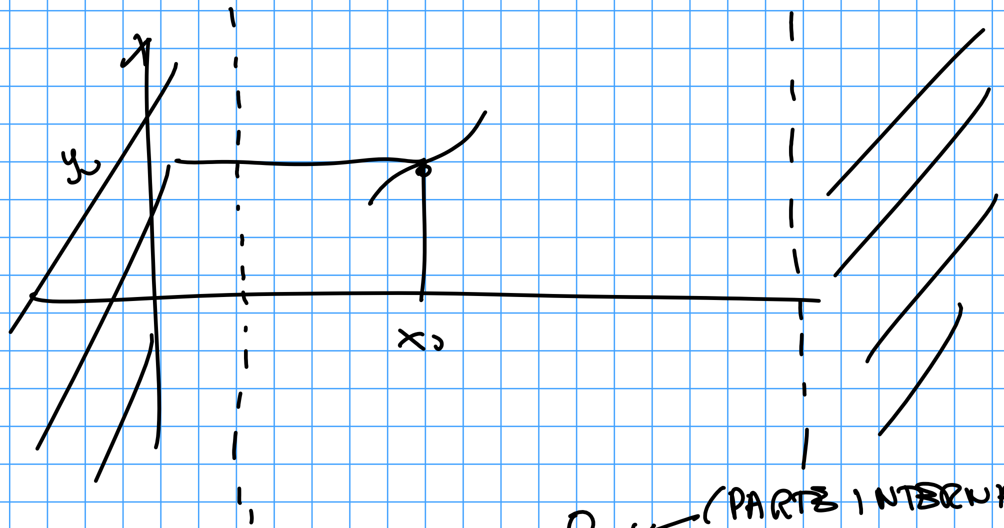
SI VEDE CHE $\| A \| \leq \max_{i,j} |a_{ij}|$)

$$\leq \underbrace{\max_{a\leq x\leq b} \|A(x)\|}_{L} \; \|Y_1 - Y_2\|_{\mathbb{R}^N}$$

(A è continua, $[a,b]$ è chiuso e limitato)

DUNQUE $F(x, y)$ È LIPSCHITZIANA IN Y

SE $x \in [a,b]$, per qualunque $[a,b] \subset I$

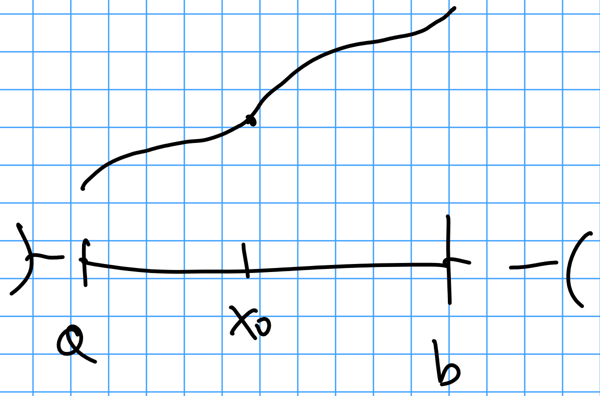


QUINDI $\forall x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (PARTE INTERNA DI I) $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^N$ esiste

$Y(x)$ SOLUZIONE, DEFINITA SU $]x_0-\delta, x_0+\delta[$

se $\delta > 0$ è piccolo

PERÒ SE SI USA LA STIMA TROVATA QUALCHE LEZIONE FA, SI VEDE CHE



$$\|Y(x)\| \leq \|Y(x_0)\| \, e^{L|x-x_0|}$$

dove L è la costante di Lipschitz vol. di su $[a,b]$

$$\Big(L = \max_{x \in [a,b]} \|A(x)\| \Big)$$

$\Rightarrow$ $Y(x)$ deve esistere $\forall x \in [a,b]$

DUNQUE, SE L'EQUAZIONE È LINEARE, $\forall x_0 \in I$, $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^N$ $\Rightarrow$ L'INTERVALLO MASSIMALE È I

PROPRIETÀ DELLE EQ. LINEARI (LA VERIFICA È SEMPLICE)

(a) SE Y_1 e Y_2 RISOLVONO L'OMOGENEA $\Rightarrow$

$\lambda Y_1 + \mu Y_2$ RISOLVE L'OMOGENEA

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(b) Se Y_0 è sol. dell' omogenea e

Y_1 è sol. della "completa" $\Rightarrow$ $Y_0 + Y_1$ è sol. della completa

(c) Se Y_1 e Y_2 risolvono l'eq. completa $\Rightarrow$

$Y_1 - Y_2$ risolve l'omogenea.

TEOREMA

(A) LE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA FORMANO UNO SPAZIO LINEARE DI DIMENSIONE N

CIOÈ:

ESISTONO $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_N$ SOLUZIONI DELL'OMOG.

TALI CHE

(a) Sono linearmente indipendenti : se $\lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$,

se $\lambda_1 \hat{Y}_1(x) + \dots + \lambda_N \hat{Y}_N(x) = 0 \quad \forall x$

ALLORA $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$

(b) generano tutte le soluzioni dell'omogenea :

data Y sol. dell'omogenea $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$

per cui $Y(x) = \lambda_1 \hat{Y}_1(x) + \dots + \lambda_N \hat{Y}_N(x)$