Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 29, 9 dicembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

Mettiamo in evidenza alcuni "risultati di confronto"

FATTO 1 $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ $\quad F_1, F_2 : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tali che

- continue su Ω
- Lipschitziane rispetto a y; $\exists K$:

$$\| F_1(x, y_1) - F_1(x, y_2) \| \leq K \| y_1 - y_2 \|$$
(F_2)

$$\forall \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^N}}{y_1 y_2} \quad t.c. \quad (x, y_1)\,(x, y_2) \in \Omega$$

INOLTRE
- $\| F_1(x, y) - F_2(x, y) \| \leq \gamma \quad$ per ogni $(x, y) \in \Omega$

PRENDIAMO
- $x_0 \in \mathbb{R}$, $\quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N$ tali che (x_0, y_1), $(x_0, y_2) \in \Omega$
- y_1 soluzione di $y_1' = F_1(x, y_1)$

  tale che $y_1(x_0) = y_1$
- y_2 sol. di $y_2' = F_2(x, y_2)$ con $y_2(x_0) = y_2$

y_1 e y_2 definite vicino a x_0

(NOTA CHE y_1, y_2 sono vettori in $\mathbb{R}^N$);

VOGLIO STIMARE $\| Y_2(x) - Y_1(x) \|$ quando $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

SI HA:

$$\| y_2(x) - y_1(x) \| \leq \| y_2 - y_1 \| + \frac{\gamma}{\sqrt{2(K+1)}} \sqrt{e^{2(K+1)(x-x_0)} - 1}$$

Dim. Chiamo $z(x) = \| y_2(x) - y_1(x) \|^2$, si ho:

$$z'(x) = 2\,(y_2(x) - y_1(x)) \cdot (y_2'(x) - y_1'(x)) =$$

$$2\,(y_2(x) - y_1(x)) \cdot \left(F_2(x, y_2(x)) - F_1(x, y_1(x))\right) =$$

$$2\,(y_2(x) - y_1(x)) \cdot \Big\{ \underbrace{F_2(x, y_2(x)) - F_2(x, y_1(x))}_{①} + \underbrace{F_2(x, y_1(x)) - F_1(x, y_1(x))}_{②} \Big\}$$

ALLORA $\| ① \| \leq K \, \| y_2(x) - y_1(x) \|$

$\| ② \| \leq \gamma$

NE RICAVO

$$|z'(x)| \leq 2K\,\|y_2(x)-y_1(x)\|^2 + 2\gamma\,\|y_2(x)-y_1(x)\| \leq$$

$(2a\cdot b \leq a^2+b^2)$

$$2K\,\|y_2(x)-y_1(x)\|^2 + \gamma^2 + \|y_2(x)-y_1(x)\|^2 \leq$$

$$2(K+1)\,\|y_2(x)-y_1(x)\|^2 + \gamma^2 =$$

$$2(K+1)\,z(x) + \gamma^2$$

$$\Updownarrow$$

$$-2(K+1)\,z(x)+\gamma^2 \leq \underbrace{z'(x) \leq 2(K+1)z(x)+\gamma^2}$$

guardo questo pezzo: moltiplico per $e^{-2(K+1)x}$:

$$\left(z(x)\,e^{-2(K+1)x}\right)' \leq \gamma^2 e^{-2(K+1)x} \qquad \forall x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

$$\Uparrow$$

INTEGRO TRA x_0 e $x \geq x_0$

$$z(x)\,e^{-2(K+1)x} - z(x_0)\,e^{-2(K+1)x_0} \leq \left[\frac{\gamma^2 e^{-2(K+1)x}}{-(2K+1)}\right]_{x_0}^{x}$$

$$z(x)\, e^{-2(k+1)x} \le z(x_0)\, e^{-2(k+1)x_0} + \frac{\gamma^2}{2(k+1)}\left(e^{-2(k+1)x_0} - e^{-2(k+1)x}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$z(x) \le z(x_0)\, e^{2(k+1)(x-x_0)} + \frac{\gamma^2}{2(k+1)}\left(e^{2(k+1)(x-x_0)} - 1\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\| y_2(x) - y_1(x) \|^2 \le \| y_2 - y_1 \|^2 + \frac{\gamma^2}{2(k+1)}\left(e^{2(k+1)(x-x_0)} - 1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\| y_2(x) - y_1(x) \| \le \| y_2 - y_1 \| + \frac{\gamma}{\sqrt{2(k+1)}} \sqrt{e^{2(k+1)(x-x_0)} - 1}$$

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2} \le a + b \iff a^2 + b \le a^2 + 2ab + b^2 \right)$$

ok (l'ho dimostrato se $x \geq x_0$; se $x < x_0$ si usa l'altra dis.)

DUNQUE SE F_1 e F_2 differiscono di poco

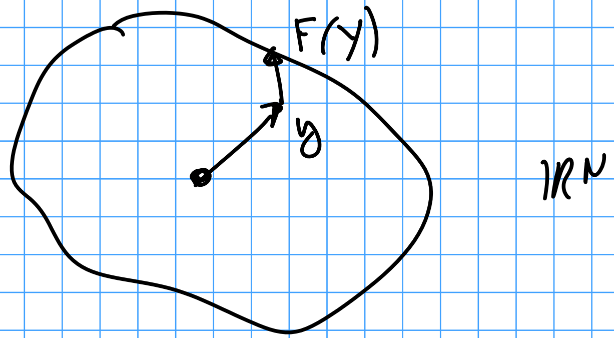
e $y_1 = y_2 \Rightarrow y_1(x)$ e $y_2(x)$ differiscono di Poco

FATTO 2 Se F è continua e Lipschitziana in Ω

e se

$$F(x,y)\cdot y \geq \gamma_0 \|y\|^2$$

con $\gamma_0 > 0$



$$\Rightarrow \boxed{\|y(x)\| \geq \|y(x_0)\|\, e^{\gamma_0 (x-x_0)}}$$

Dim Come primo chiamo $z(x) = \|y(x)\|^2$

$$z'(x) = 2\, y(x)\cdot y'(x) = 2\, y(x)\cdot F(x, y(x))$$

$$\geq 2\gamma_0 \|y(x)\|^2 = 2\gamma_0\, z(x)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-2\gamma_0 x} z'(x) - 2\gamma_0\, e^{-2\gamma_0 x} z(x) \geq 0$$

$\Leftrightarrow \quad \left(e^{-2\gamma_0 x} z(x)\right)' \geq 0$

$\Rightarrow \quad e^{-2\gamma_0 x} z(x) \geq e^{-2\gamma_0 x_0} z(x_0)$

$\Rightarrow \quad z(x) \geq z(x_0)\, e^{2\gamma_0 (x - x_0)}$

$\Rightarrow \quad \|y(x)\|^2 \geq \|y_0\|^2 e^{2\gamma_0 (x-x_0)}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\|y(x)\| \geq \|y_0\| e^{\gamma_0 (x - x_0)}}$

<u>FATTO</u> CONSIDERO ORA $N=1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

SE $F_1(x,y) \leq F_2(x,y)$

e $\begin{cases} y_1' = F_1(x, y_1) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_2' = F_2(x, y_2) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$ $\Longrightarrow y_1(x) \leq y_2(x) \quad \forall x \geq x_0$

(stesso dato iniziale)

Dim. Facciamo il caso $F_1(x,y) < F_2(x,y)$

Chiamiamo $y(x) = y_2(x) - y_1(x)$, Dimostriamo

che in questo caso $y(x) \geq 0 \quad \forall x > x_0$

(MENTRE IN x_0 $y(x_0) = 0$)

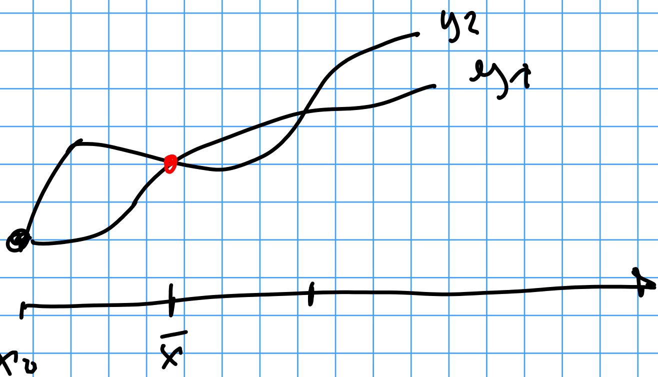
CHIAMO $\bar{x} = \inf \{ x' \text{ tali che } y(x') < 0 \}$

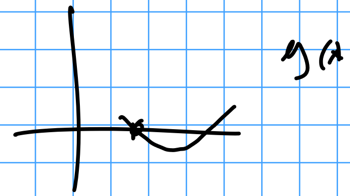
SI HA $\boxed{y(\bar{x}) = 0}$

perché y è continua

e perché in x_0 $y(x) = 0$

$y_2(\bar{x}) = y_1(\bar{x})$





IN $\bar{x}$ si ha:

$$y'(\bar{x}) = y_2'(\bar{x}) - y_1'(\bar{x}) = F_2(x, y_2(\bar{x})) - F_1(x, y_1(\bar{x}))$$

sono "$= \bar{y}$"

$$= F_2(x, \bar{y}) - F_1(x, \bar{y}) > 0 \quad (\text{per ipotesi})$$

Se $y(\bar{x}) = 0$ $\quad y'(\bar{x}) > 0 \Rightarrow y(x) > 0$ per $x > \bar{x}$

x vicino a $\bar{x}$ CONTRADDICE LA DEF. DI $\bar{x}$

QUINDI NON CI SONO PUNTI IN CUI $y(x) < 0$

OSSERVAZIONE Per avere l'esistenza "locale"

basta che F sia "localmente" lipschitziana in Ω, cioè

basta che

DATO $(x_0, y_0) \in \Omega$ esiste un intorno U di (x_0, y_0)

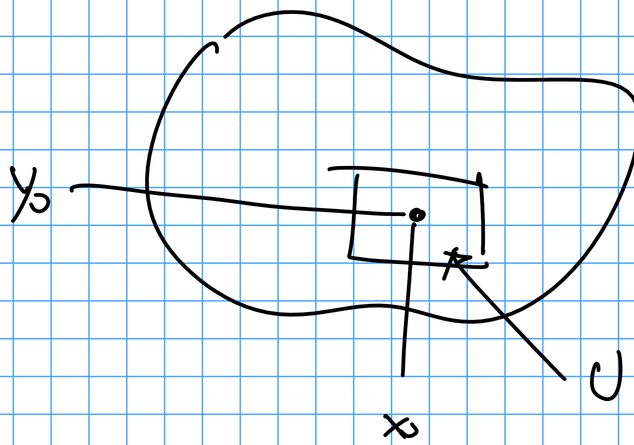
in cui F è Lip.

$\Uparrow$

vero se $\exists \frac{\partial F}{\partial y}$ continua

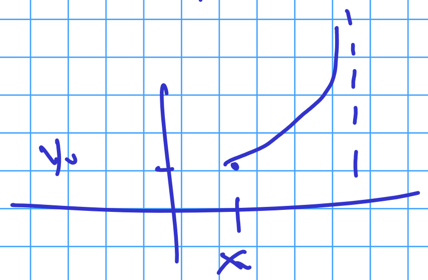
su Ω

(che potrebbe essere illimitata quando mi avvicino a $\partial\Omega$)



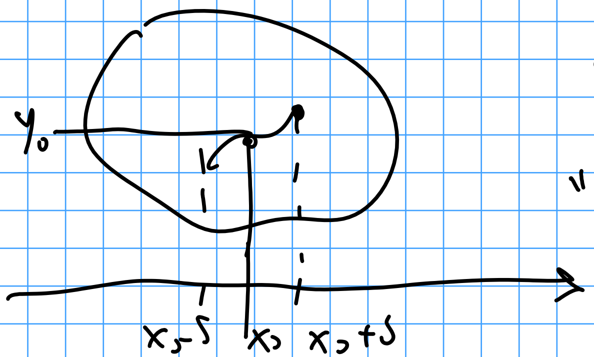
Per esempio $y' = y^2$ rientra nel teorema di esistenza locale anche se $F(y) = y^2$ NON è Lip. su $\mathbb{R}$, però è Lip. su ogni intervallo

IN EFFETTI la sol. di $y' = y^2$ NON "vivono" su tutto $\mathbb{R}$; esistono sol. per un tempo finito ed "esplodono"



Teorema (intervallo "massimale")

Supponiamo F è continua su Ω e localmente Lip rispetto a y su Ω. Sia (x_0, y_0) un punto di Ω.



So che esiste $y(x)$ soluzione, definita "vicino a x_0" (su $]x_0-\delta, x_0+\delta[$)

ESISTONO $\bar{t} > x_0$ e $\underline{t} < x_0$ tali che

esiste una soluzione definita su $]\underline{t}, \bar{t}[$

(ed è unica). Inoltre vale una delle le seguenti

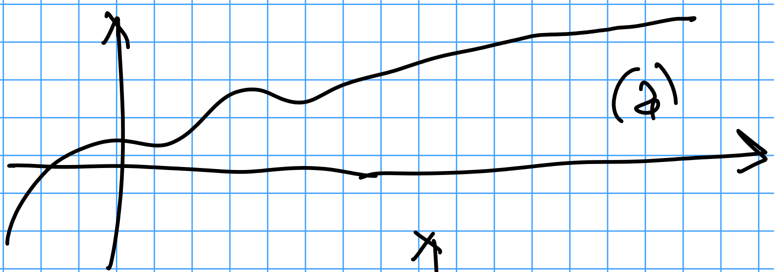
RIGUARDO A $\bar{t}$ può succedere:

(a) $\bar{t} = +\infty$

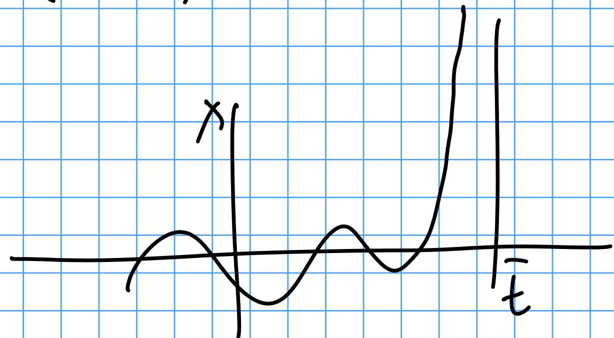
(b) $\bar{t} < +\infty$ e $\lim_{t \to \bar{t}^-} \|y(t)\| = +\infty$

(c) $\bar{t} < +\infty$, $\|y(t)\|$ è limitata e

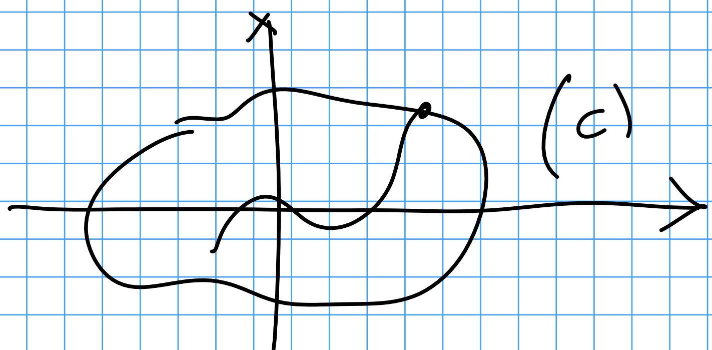
$$\lim_{t \to \bar{t}^-} \text{distanza}(y(x), \partial\Omega) = 0$$



(a)

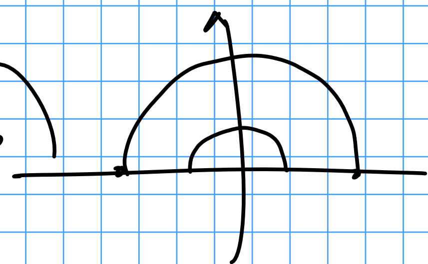


(b)



(c)

(per esempio)



(ANALOGO DISCORSO PER $\underline{t}$)

L'intervallo $]\underline{t}, \bar{t}[$ si chiama "INTERVALLO MASSIMALE" di esistenza (SERVE PER DEFINIRLO CHE F sia LIP. in y !!)

$$y' = \frac{\sin(y)}{x^2 + y^2}$$

<u>DOMANDA</u> DOVE SI PUÒ APPLICARE IL T. DI CAUCHY ?!

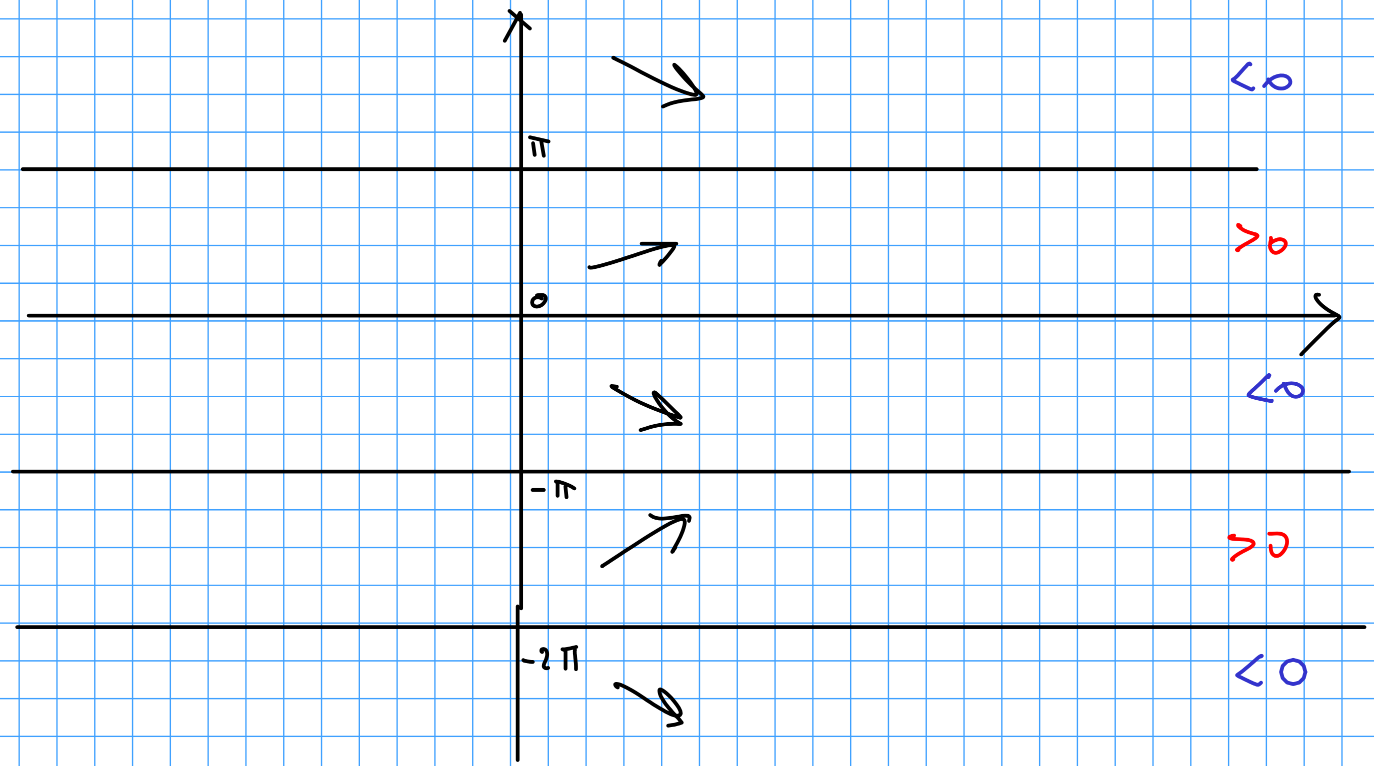
<u>Qui</u> $F(x,y) = \dfrac{\sin(y)}{x^2+y^2}$ che è derivabile in y

per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

POSSO APPLICARE CAUCHY NELL'INTORNO DI OGNI $(x,y) \neq (0,0)$

- ANALISI "QUALITATIVA" DELLE SOL.

STUDIAMO COME VARIA IL SEGNO DI $F(x,y)$

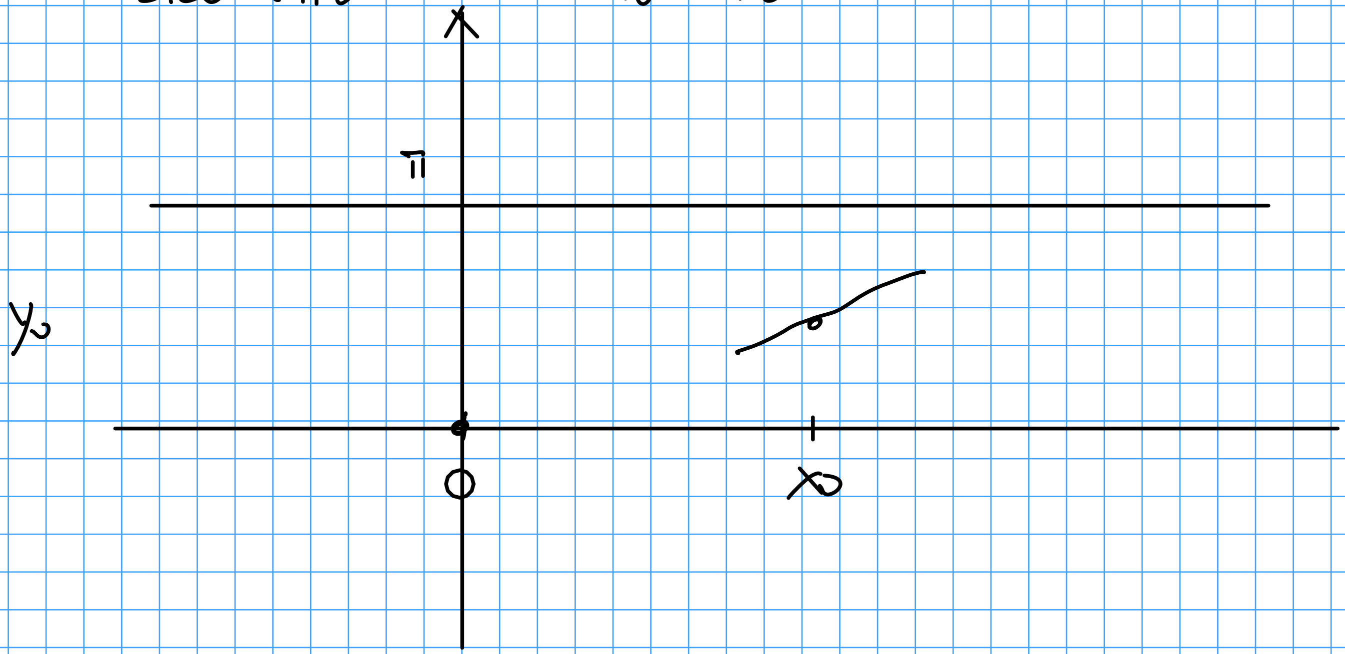


- Se $y_0 = k\pi$ con $k \neq 0$ $\Rightarrow$ la sol. è $y(x) = k\pi$ definita $\forall x \in \mathbb{R}$ (queste sono soluzioni e d'altra parte la sol. è unica.)

- Se $y_0 = 0$ $\Rightarrow$ $y(x) = 0$ è sol se $x \neq 0$
  (A RIGORE...)

- PRENDIAMO $0 < y_0 < \pi$ $\quad x_0 > 0$
  SICURAMENTE $\exists$ $y(x)$ soluzione definita per x vicino a x_0.

DICO CHE $\bar{t} = +\infty$



NON può essere $y(x) = \pi$ per nessun $x \in]x_0, \bar{t}[$

(NON CI SAREBBE UNICITÀ) $\Rightarrow$ $y(x) \in]y_0, \pi[$

$\forall x \in]x_0, \bar{t}[$ $\Rightarrow$ $y'(x) > 0$ $\forall x \in]x_0, \bar{t}[$

$\Rightarrow$ $y(x)$ cresce su $]x_0, \bar{t}[$ $\Rightarrow$ $\exists \lim_{x \to \bar{t}} y(x) = \bar{y}$

SE FOSSE $\bar{t} < +\infty$, dovrebbe valere una tra (b) e (c)

La (b) dice che $|y(x)| \to +\infty$ NO perché

$0 \leq \bar{y} \leq \pi$. La (c) dice che $y(x) \to \partial\Omega = (0,0)$

IMPOSSIBILE PERCHÉ $x_0 > 0 \Rightarrow \bar{t} > 0$

$\Longrightarrow \quad \bar{t} = +\infty$ ed esiste $\bar{y} = \lim\limits_{x \to +\infty} y(x)$

Dico che $\bar{y} = \pi$, perchè, dall'equazione

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y(x)) =$$

CONTINUIAMO DOMANI