Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 28, 4 dicembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

MODELLO PIÙ "ELEMENTARE"

EQUAZIONE DEL PRIMO ORDINE "VETTORIALE"

(SISTEMA DI N EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE)

TEOREMA DI ESISTENZA PER IL PROBLEMA DI CAUCHY

$$Y' = F(x, Y)$$

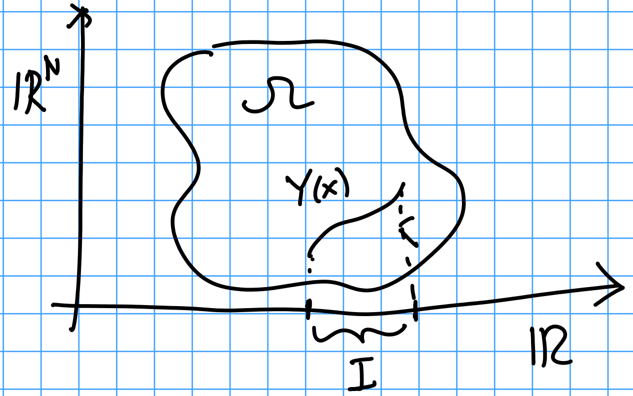
dove $Y = Y(x)$ è un vettore di N componenti :

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{pmatrix} \qquad F(x, y_1 \cdots y_N) = \begin{pmatrix} F_1(x, y_1 \cdots y_N) \\ \vdots \\ F_N(x, y_1, \ldots, y_N) \end{pmatrix}$$

$F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ dove $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

(SE F NON DIPENDE DA x SI DICE CHE L'EQUAZIONE È AUTONOMA)

Ω lo prendiamo aperto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$



$(N=1)$

CHIAMO "SOLUZIONE" DELL'EQUAZIONE

$$(E) \quad Y' = F(x,Y)$$

una funzione $Y: I \to \mathbb{R}^N$, dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$, con Y derivabile su I,

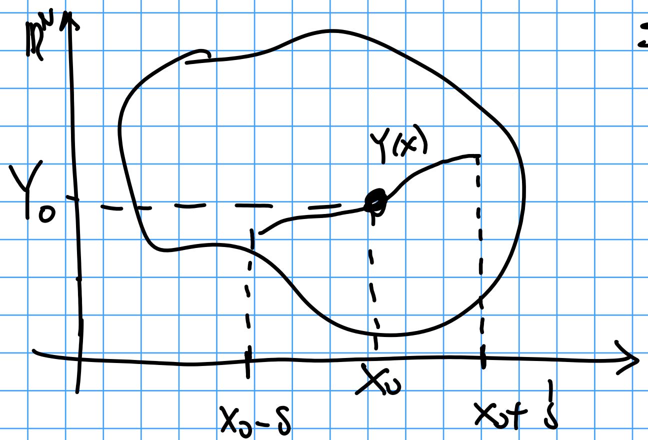
$$(x, Y(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I \quad \text{e} \quad Y'(x) = F(x, Y(x))$$

↑ detto in componenti significa che

$$\begin{cases} y_1'(x) = F_1(x, y_1(x), \dots, y_N(x)) \\ \vdots \\ y_N'(x) = F_N(x, y_1(x), \dots, y_N(x)) \end{cases}$$

N equazioni
N incognite
$(y_1 \dots y_N)$

TEOREMA (PEANO) Se F è continua (rispetto a tutte le sue variabili), se $(x_0, Y_0) \in \Omega$



$\Rightarrow \exists\ \delta > 0$ ed esiste

$$Y :]x_0-\delta, x_0+\delta[\rightarrow \mathbb{R}^N$$

TALE CHE:

(1) $(x, Y(x)) \in \Omega \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

(2) VALE L'EQUAZIONE

$$Y'(x) = F(x, Y(x)) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

(3) $Y(x_0) = Y_0$

① TEOREMA DI ESISTENZA "LOCALE": si risolve l'equazione VICINO A (x_0, Y_0)

② NON È DETTO CHE LA SOLUZIONE SIA UNICA

(questo dipende dal fatto che ho ipotizzato "solo" F CONTINUA)

RICORDIAMO L'ESEMPIO SEGUENTE:

$$(P)\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \leftarrow \quad \text{QUI } F(x,y) = \sqrt{|y|} \ \text{(AUTONOMA)}$$

$$\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

RICORDANDO IL METODO RISOLUTIVO DELLE EQ. VARIABILI SEPARABILI VEDIAMO CHE

- $y(x) = 0$ è soluzione dell'equazione ($\Rightarrow$ risolve (P) se $y_0 = 0$)

- Se prendo $y_0 > 0$ esiste $y(x)$ soluzione, definita vicino a x_0, $y(x) > 0$ se $x \approx x_0$, e la trovo ...

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 1 \qquad \text{INTEGRO TRA } x_0 \text{ E } x$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{y(x)^{1/2}}\,dx = x - x_0 \iff \quad \text{prendo } s = y(x)$$

$$y'(x)\,dx = ds$$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = x - x_0$$

$$\left[\, 2\sqrt{s}\,\right]_{y_0}^{y(x)} = 2\sqrt{y(x)} - 2\sqrt{y_0}$$

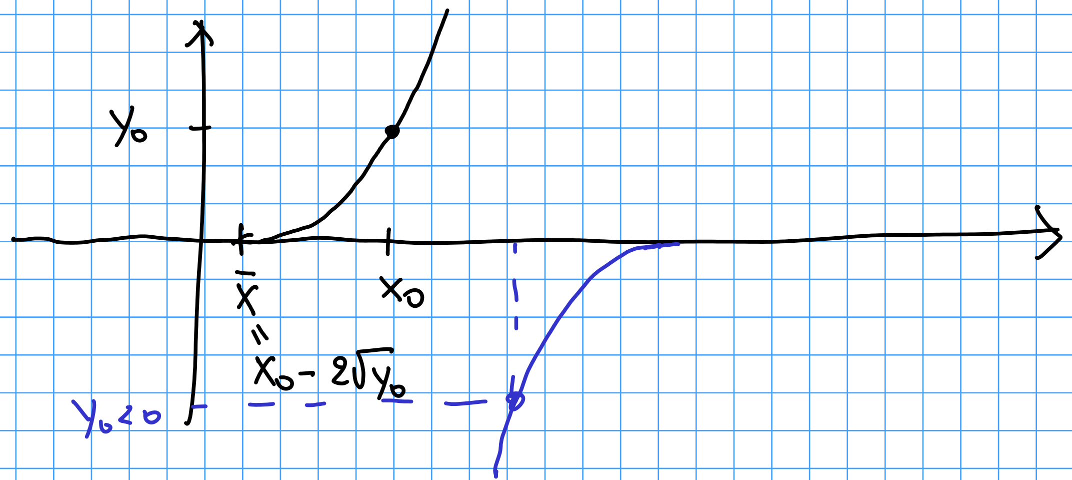
DUNQUE

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \left(\frac{x-x_0}{2} + \sqrt{y_0}\right)^2$$

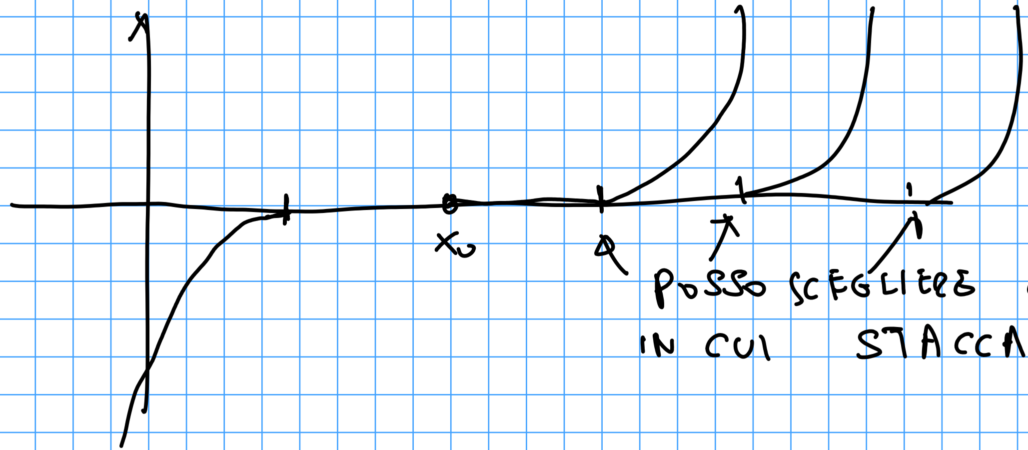
e risulta definito fino a quando $\frac{x-x_0}{2} + \sqrt{y_0} \geq 0$

cioè per $x > x_0 - 2\sqrt{y_0} =: \bar{x}$



SE PRENDO $y_0 < 0$ si fa in maniera simile e si hanno una sol. come nel disegno

MORALE: Se prendo $y_0 = 0$ Ho INFINITE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DI CAUCHY



POSSO SCEGLIERE COME MI PARE IL PUNTO IN CUI STACCARMI DA ZERO

LA FUNZIONE $F(y) = \sqrt{|y|}$ È CONTINUA, MA, per esempio, NON È DERIVABILE. NOTA CHE IL FENOMENO DI NON UNICITÀ PARTE DA $y_0 = 0$ E $y_0 = 0$ È PROPRIO L'ARGOMENTO IN CUI F NON È DERIVABILE.

PER AVERE RISULTATI DI UNICITÀ (E "DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE") SERVE CHE F SIA "LIPSCHITZIANA" RISPETTO A Y.

IPOTESI (L) ESISTE UNA COSTANTE $K \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$\|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\|_{\mathbb{R}^N} \leq K \|Y_1 - Y_2\|_{\mathbb{R}^N}$$

$\forall\ x\ \forall\ Y_1, Y_2$ tali che

$(x, Y_1), (x, Y_2) \in \Omega$

TEOREMA (DI CAUCHY) Se F è continua e vale l'ipotesi (L), allora dato $(x_0, Y_0) \in \Omega$ esiste UNICA una soluzione locale del problema

$$(P) \begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Questo significa che $\exists\ \delta\ \exists\ Y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ che risolve l'eq. (COME PRIMA). INOLTRE se I è un intervallo, se $Y_1, Y_2 : I \to \mathbb{R}^N$ risolvono (P)

NECESSARIAMENTE $\quad Y_1(x) = Y_2(x) \quad \forall x \in I$

(1) c'è un intervallo (piccolo, contenente x_0) in cui si risolve.

(2) Per ogni intervallo in cui si risolve, la soluzione è unica.

(1) è il teorema di Peano. (2) è Cauchy

VEDIAMO COME SI DIMOSTRA (2):

Supponiamo di avere un intervallo $]a,b[$ con $x_0 \in]a,b[$ e due soluzioni $Y_1, Y_2 :]a,b[\to \mathbb{R}^N$

PONIAMO $\quad Y(x) := Y_1(x) - Y_2(x) \quad (Y :]a,b[\to \mathbb{R}^N)$

e prendiamo $\quad z(x) = \|Y(x)\|^2 \ ; \quad z :]a,b[\to \mathbb{R}$

(se dimostro che $z(x) = 0 \Rightarrow Y(x) = 0 \Rightarrow Y_1(x) = Y_2(x)$)

FACCIAMO LA DERIVATA DI $z(x)$

$$z'(x) = 2\, Y(x) \cdot Y'(x) \qquad \left(\text{se } f(X) = \|X\|^2 \Rightarrow \nabla f(X) = 2X \right)$$

$$= 2\left(Y_1(x) - Y_2(x)\right) \cdot \left(F(x, Y_1(x)) - F(x, Y_2(x))\right)$$

$\Downarrow$

$$|z'(x)| \le 2\,\|Y_1(x)-Y_2(x)\|\,\|F(x,Y_1(x))-F(x,Y_2(x))\| \le$$

$$2\,\|Y_1(x)-Y_2(x)\|\cdot K\,\|Y_1(x)-Y_2(x)\| =$$

$$2K\,z(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{-2K\,z(x) \le}_{(\star\star)} \underbrace{z'(x) \le 2K\,z(x)}_{\star}$$

FATTORE INTEGRANTE

MOLTIPLICO $\star$ per e^{-2Kx} $\Rightarrow$

$$e^{-2Kx} z'(x) - 2K\,e^{-2Kx} z(x) \le 0$$

$$\overset{\|}{\left(e^{-2Kx} z(x)\right)'}$$

$\Rightarrow$ $e^{-2Kx} z(x)$ è decrescente !! se $x > x_0$, allora

$\Rightarrow$ $e^{-2Kx} z(x) \le e^{-2Kx_0} z(x_0)$

$\Rightarrow$ $z(x) \le e^{2K(x-x_0)} z(x_0) \quad \forall x > x_0$ $|||$

MA $0 \le z(x_0) = \|Y_1(x_0) - Y_2(x_0)\|^2 = \|Y_0 - Y_0\|^2 = 0$

$\Rightarrow \quad z(x)=0 \qquad \forall x > x_0$

ANALOGAMENTE, USO L'ALTRA DIS. $(\star\star)$ e trovo

$$z(x) \leq e^{2K|x-x_0|} z(x_0) \qquad \forall x$$

e quindi se $z(x_0)=0 \Rightarrow z(x)=0 \quad \forall x \Rightarrow$

$$Y_1(x) = Y_2(x) \qquad \forall x \in]0,b[$$

NOTA Nello maniera trovo che, se Y_1 e Y_2 risolvono l'equazione $\Rightarrow$

$$(G) \qquad \| Y_1(x) - Y_2(x) \| \leq \| Y_1(x_0) - Y_2(x_0) \| e^{K|x-x_0|}$$

(FACCIO IL CONTO DI PRIMA e poi faccio la radice)

QUESTO IMPLICA :

Se Y è sol con $Y(x_0) = Y_0$
$\tilde{Y}$ è sol. con $\tilde{Y}(x_0) = \tilde{Y}_0$ su intervallo I

allora $\forall x \in I$ si ha

$$\lim_{\tilde{Y}_0 \to Y_0} \tilde{Y}(x) = Y(x)$$

DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE

(È UN'ALTRA PARTE DEL TEOREMA DI CAUCHY)

(G) si chiama "disuguaglianza di Gronwall"

<u>OSSERVAZIONE</u> PER AVERE L'IPOTESI (L) BASTA CHE

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} \dots \frac{\partial F}{\partial y_N}$$ sono continue in Ω

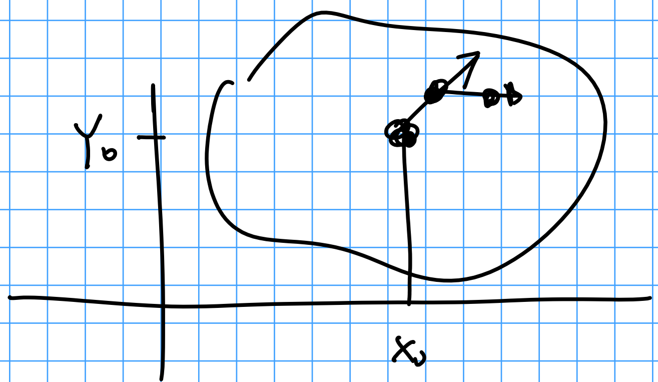
(questa condizione non è necessaria: $F(y) = |y|$ è Lipschitziana, MA NON È DERIVABILE)

COME SI DIMOSTRA IL TEOR. INIZIALE:

SI PUÒ "DISCRETIZZARE"

. FISSO UN "PASSO" $\Delta > 0$ (piccolo ..)

- PARTO DAL FATTO CHE $Y(x_0) = Y_0$
- CALCOLO $F(x_0, Y_0)$ ← è un vettore in $\mathbb{R}^N$
- PRENDO $Y(x_0+\Delta) := Y_0 + \Delta F(x_0, Y_0)$



- DA $Y(x_0+\Delta)$ FACCIO LO STESSO PROCEDIMENTO:

CALCOLO $F(x_0+\Delta, Y(x_0+\Delta))$ ← vettore di $\mathbb{R}^N$

e PONGO $Y(x_0+2\Delta) = Y(x_0+\Delta) + \Delta F(x_0+\Delta, Y(x_0+\Delta))$

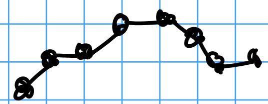
⋮ ITERO

- AL PASSO n-ESIMO HO COSTRUITO

$$Y(x_0), Y(x_0+\Delta), Y(x_0+2\Delta), \dots, Y(x_0+n\Delta)$$

DEFINISCO $Y(x_0+(n+1)\Delta) = Y(x_0+n\Delta) + F(x_0+n\Delta, Y(x_0+n\Delta))\cdot\Delta$

(LO FACCIO FINO A CHE RIMANGO IN Ω)



Y_0

POSSO POI DEFINIRE $Y_\Delta(x)$ ANCHE NEI TRATTI INTERMEDI CONGIUNGENDO CON I SEGMENTI

SI VEDE CHE, PER $\Delta \to 0$, QUESTE CURVE Y_Δ "TENDONO" A UNA Y CHE È SOLUZIONE DEL PROBLEMA

(Ho costruito Y_Δ nei punti $x_0 + m\Delta$ con la condizione:

$$(*) \quad \frac{Y_\Delta(x_0+(m+1)\Delta) - Y_\Delta(x_0+m\Delta)}{\Delta} = F(x_0+n\Delta, Y_\Delta(x_0+n\Delta))$$

$$\underline{\underline{n}}$$

SE METTESSI $n+1$ INVECE DI n MI RITROVO CON

UN SISTEMA DI m EQ. IN n INCOGNITE

SE LO RISOLVO TROVO UNA DISCRETIZZAZIONE

CHE CONVERGE MOLTO MEGLIO DELLA PRECEDENTE