Analisi Matematica II

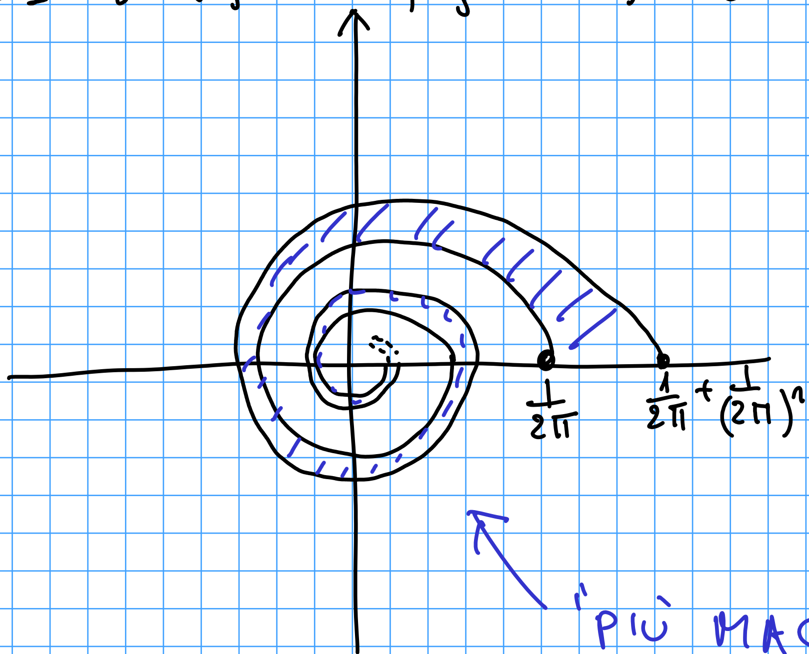
prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 27, 2 dicembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

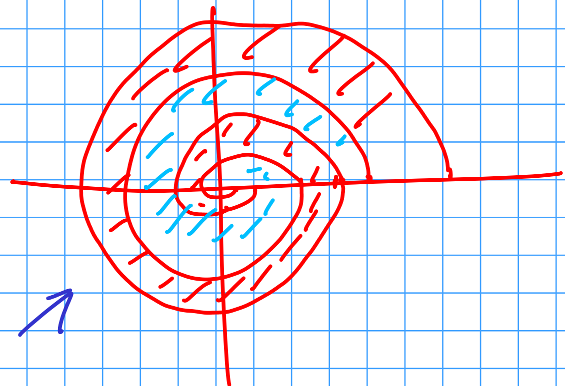
UN' ALTRA SPIRALE ...

$$S_1 = \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{1}{\theta} \le \rho \le \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \qquad \theta \ge 2\pi \right\}$$



STAMATTINA

$$S = \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \quad \frac{1}{\theta+\pi} \le \rho \le \frac{1}{\theta} \right\}$$



"PIÙ MAGRA" DI

CALCOLIAMO $|S_1|$

$$\iint_{S_1} 1 \, dx\,dy = \int_{2\pi}^{+\infty} \left(\int_{\frac{1}{\theta}}^{\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}} \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

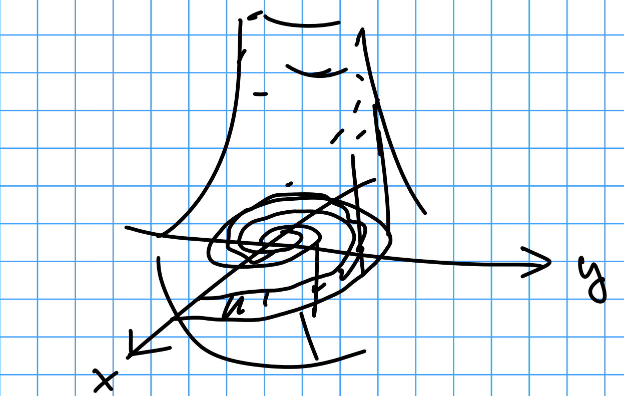
$$\int_{2\pi}^{+\infty} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\frac{1}{\theta}}^{\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}} d\theta = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \right)^2 - \frac{1}{\theta^2} \right] d\theta =$$

$$\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta} \right) \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} \right)$$

$$\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{+\infty}\left(\frac{2}{\vartheta}+\frac{1}{\vartheta^2}\right)\frac{1}{\vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{+\infty}\left(\frac{2}{\vartheta^3}+\frac{1}{\vartheta^4}\right)d\vartheta =$$

$$\frac{1}{2}\left[-\vartheta^{-2}-\frac{\vartheta^{-3}}{3}\right]_{2\pi}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{3(2\pi)^3}\right)=\frac{1}{8\pi^2}\left(1+\frac{1}{6\pi}\right)$$

PARTENDO DA S_1 DEFINISCO (per $\alpha>0$)

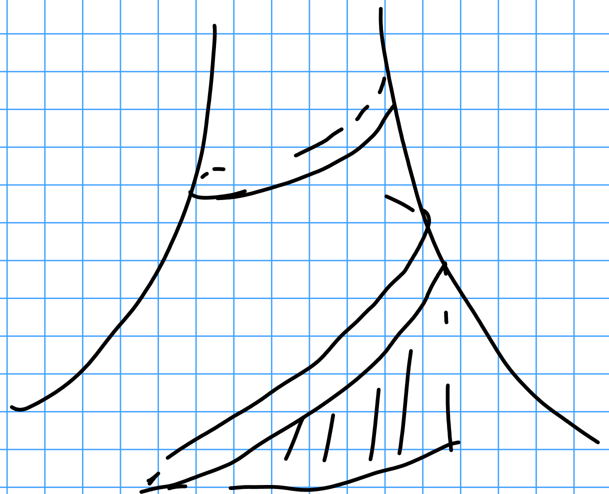


$$A_\alpha=\left\{(x,y,z):\ (x,y)\in S_1,\ 0\le z\le \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\right\}$$

$|A_\alpha| = ?$

(per quali α è finito??)

$$\iiint_{A_\alpha} x^2 y z \,dx\,dy\,dz = ??$$



$$|A_\alpha| = \iint_{S_1}\left(\int_0^{\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}} 1\,dz\right)dx\,dy =$$

$$\iint_{S_1}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = $$ (passando in coordinate polari)

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \left(\int_{\frac{1}{\theta}}^{\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}} \underbrace{\frac{1}{\rho^{2\alpha}}\,\rho}_{\rho^{1-2\alpha}}\, d\rho \right) d\theta = \int_{2\pi}^{+\infty} \left[\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right]_{\frac{1}{\theta}}^{\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}} d\theta =$$

($\alpha \neq 1$, se no viene un logaritmo, - LO VEDIAMO EVENTUALMENTE DOPO)

$$\frac{1}{2(1-\alpha)} \int_{2\pi}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \right)^{2(1-\alpha)} - \left(\frac{1}{\theta} \right)^{2(1-\alpha)} \right] d\theta$$

NON TENTIAMO DI FARE L'INTEGRALE.
VEDIAMO SOLO PER QUALI α CONVERGE

NOTA CHE I DUE PEZZI - PRESI SEPARATAMENTE - SONO $\simeq \frac{1}{\theta^{2(1-\alpha)}}$ e QUINDI SONO (SEPARATAMENTE) INTEGRABILI

se $2(1-\alpha) > 1 \iff 2 - 2\alpha > 1 \iff 1 > 2\alpha \iff \alpha < \frac{1}{2}$

DUNQUE SE $\alpha < \frac{1}{2}$ L'INSIEME HA MISURA FINITA

CERCHIAMO DI CAPIRE A COSA È ASINTOTICA QUESTA DIFFERENZA

$$[\cdot - \cdot] = \left(\frac{1}{\theta}\right)^{2(1-\alpha)} \left\{ \left(\frac{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}}{\frac{1}{\theta}} \right)^{2(1-\alpha)} - 1 \right\} =$$

$$\frac{1}{\theta^{2(1-\alpha)}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\theta} \right)^{2(1-\alpha)} - 1 \right\} \simeq \frac{1}{\theta^{2(1-\alpha)}} \left\{ \cancel{1} + \frac{2(1-\alpha)}{\theta} - \cancel{1} \right\} =$$

$$\frac{2(1-\alpha)}{\theta^{3-2\alpha}}$$ | HO USATO $(1+x)^\beta = 1+\beta x + o(x)$ a $x \to 0$

DUNQUE L'INTEGRANDO È ASINTOTICO A $\dfrac{2(1-\alpha)}{\theta^{3-2\alpha}}$

che è integrabile su $[2\pi, +\infty[$ QUANDO $3-2\alpha > 1$

CIOÈ $\boxed{\alpha < 1}$ (se si fa la verifica si dovrebbe vedere che $\alpha = 1$ non va bene)

per questi α A_α ha misura finita

VEDIAMO QUANDO È FINITO $\iiint_{A_\alpha} x^2 y z \, dx\,dy\,dz$

$$\iff \iiint_{A_\alpha} x^2 |y| z \, dx\,dy\,dz < +\infty \qquad (z>0 \text{ su } A_\alpha)$$

$$\| \quad \text{(FUBINI)}$$

$$\iint_{S_1} \left(\int_0^{\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}} z \, dz \right) x^2 |y| \, dx\,dy =$$

$$\iint_{S_1} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}} x^2 |y| \, dx \, dy =$$

$$\frac{1}{2} \iint_{S_1} \frac{x^2 |y|}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} \, dx \, dy = \quad \text{(COORDINATE POLARI)}$$

$\rho^{4-4\alpha}$

$$\frac{1}{2} \int_{2\pi}^{+\infty} \left(\int_{\frac{1}{\theta}}^{\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}} \frac{\rho^2 \cos^2\theta \, \rho |\sin\theta|}{\rho^{4\alpha}} \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$\frac{1}{2} \int_{2\pi}^{+\infty} \cos^2\theta |\sin(\theta)| \left[\frac{\rho^{5-4\alpha}}{5-4\alpha} \right]_{\frac{1}{\theta}}^{\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}}$$

($5-4\alpha \neq 0$ se no bisogno usare $\ln(\rho)$ e fare un altro cont.)

$$\frac{1}{5-4\alpha} \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{+\infty} \cos^2\theta |\sin(\theta)| \left[\underbrace{\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\right)^{5-4\alpha} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^{5-4\alpha}}_{*} \right] d\theta$$

$\left((1+x)^\beta = 1+\beta x + o(x) \right)$

$$* = \frac{1}{\theta^{5-4\alpha}} \left[\left(1+\frac{1}{\theta}\right)^{5-4\alpha} - 1 \right] \simeq \frac{1}{\theta^{5-4\alpha}} \cdot \frac{5-4\alpha}{\theta} = \frac{5-4\alpha}{\theta^{6-4\alpha}}$$

DATO CHE $\cos^2\theta\,|\sin(\theta)| \leq 1$ POSSO RICAVARE CHE

PER $6-4\alpha > 1$ L'INTEGRALE CONVERGE

$\Updownarrow$

$\boxed{\alpha < \frac{5}{4}}$ $\leftarrow$ (Dunque per $\alpha \in \left[1, \frac{5}{4}\right[$ l'integrale su A_α converge, anche se $|A_\alpha| = +\infty$

NON È EVIDENTE CHE, PER $\alpha \geq \frac{5}{4}$ L'INTEGRALE DIVERGE

(PERÒ SI PUÒ DIM. CHE È VERO)