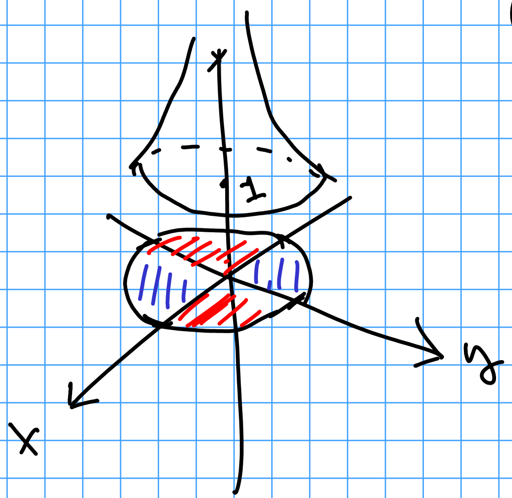
Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 26, 3 dicembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il venerdì alle 11.00 - via Buonarroti 1/c,
oppure su appuntamento (da concordare via email)

$$A = \left\{ (x,y,z) : -1 \leq z \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \right\}$$



(1) $|A| = ??$ $\qquad \alpha > 0$

(2) $\displaystyle\iiint_A xyz \, dx\,dy\,dz$ esiste?? per quali α ?

Dato che si tratta di un integrale improprio il problema (2) equivale a chiedersi se l'int. improprio

$$\iiint_A |x||y||z| \, dx\,dy\,dz < +\infty$$

(tale int. esiste comunque dato che l'integrando è ≥ 0)

Cominciamo dal punto (1) e cioè calcoliamo $|A|$ (al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$).

CONVIENE USARE LE "COORDINATE CILINDRICHE" CIOÈ

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \cos(\theta), & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta), & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(J) = \rho$:

$$|A| = \iiint_A 1 \, dx\,dy\,dz =$$

$$\int_{B(0,1)} \left(\int_1^{\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}} dz \right) dx\,dy = \quad (\text{COORD CIL.})$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_1^{\frac{1}{\rho^{2\alpha}}} 1 \, dz' \right) \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$\leftarrow$ (ok se $\alpha > 0$)

$$2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{\rho^{2\alpha}} - 1 \right) \rho \, d\rho =$$

$$2\pi \left(\int_0^1 \left(\rho^{1-2\alpha} - \rho \right) d\rho \right) = 2\pi \left[\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} - \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1$$

$\underline{2 - 2\alpha > 0} \iff \alpha < 1$

CONDIZIONE PERCHÉ $|A| < +\infty$ È $\boxed{\alpha < 1}$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2(1-\alpha)} - \frac{1}{2} \right) = \pi \left(\frac{1}{1-\alpha} - 1 \right) = \frac{\alpha \pi}{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

$= +\infty$ se $\alpha \geq 1$

② Per vedere l'integrabilità, come detto sopra, passo ai moduli.

$$\iiint_A |x||y||z| \, dx\,dy\,dz = \quad (\text{FUBINI})$$

$$\iint_{B(0,1)} \left(\int_1^{\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}} |x||y||z| \, dz \right) dx\,dy = (\text{coord. cilindriche})$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_1^{\frac{1}{\rho^{2\alpha}}} \rho|\cos\theta|\rho|\sin(\theta)||z|dz \right) \rho\, d\rho \right) d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(2\theta)| \, d\theta \cdot \int_0^1 \rho^3 \left[\frac{z^2}{2} \right]_1^{\frac{1}{\rho^{2\alpha}}} d\rho$$

$$= \frac{4}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)\, d\theta \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\rho^{3-4\alpha} - \rho^3\right) d\rho =$$

$t = 2\theta \quad dt = 2d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \sin(t)\, dt \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^{4-4\alpha}}{4-4\alpha} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 =$$

PURCHÉ $4 - 4\alpha > 0$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \left(\frac{1}{4-4\alpha} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\alpha} - 1 \right) = \frac{1}{4} \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

(se $\alpha = 1$ $\quad 1 \le z \le \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow$

$$|f(x,y,z)| = z|x\,y| \le \frac{|x||y|}{x^2+y^2} \le \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\;)$$

QUINDI $f(x,y,z) = x\,y\,z$ è integrabile su $A \Leftrightarrow \alpha < 1$

INOLTRE, PER SIMMETRIA $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$

OSSERVAZIONE RIGUARDO ALLA FUNZIONE Γ

ABBIAMO DETTO CHE:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi(x))} \qquad x \in \,]0,1[$$

(FORMULA DI RIFLESSIONE - NO DIM.) $\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

IN REALTÀ $\Gamma(1/2)$ LA POSSIAMO ANCHE CALCOLARE "A MANO" $\Rightarrow$

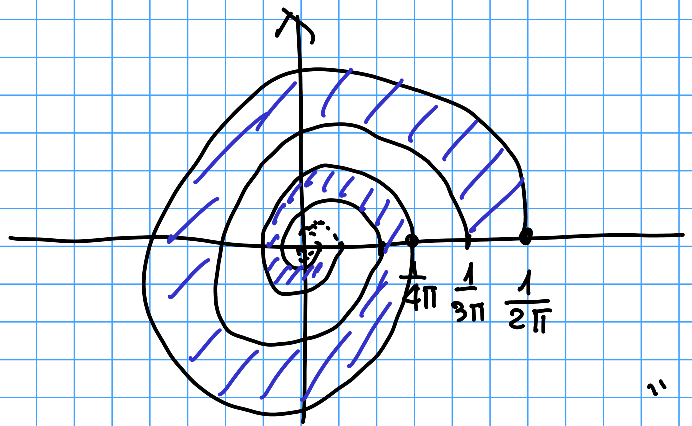
$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

si mette $t = s^2 \qquad dt = 2s\,ds \qquad \Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s} 2s\, ds = 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

ESERCIZIO

CHIAMA: $S = \{ (x,y) :\ x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$ con $\theta \geq 2\pi$, e $\frac{1}{\theta+\pi} \leq \rho \leq \frac{1}{\theta} \}$



S È UN INSIEME LIMITATO (e MISURABILE ...)

DUNQUE $|S|$ HA SENSO "NON IMPROPRIO" ($|S| < +\infty$)

VEDIAMO DI CALCOLARE $|S|$.
PASSANDO A COORD. POLARI

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \left(\int_{\frac{1}{\theta+\pi}}^{\frac{1}{\theta}} 1 \cdot \rho\, d\rho \right) d\theta = (*)$$

(IN SOSTANZA, SE $\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$, $S = \phi(A)$

DOVE A È $\{ \theta \geq 2\pi , \frac{1}{\theta+\pi} \leq \rho \leq \frac{1}{\theta} \}$ che è illimitato)

QUINDI DEVO PASSARE PER GLI INT. IMPROPRI (IN (ρ, θ))

$$(*) = \int_{2\pi}^{+\infty} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\frac{1}{\theta+\pi}}^{\frac{1}{\theta}} d\theta = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{+\infty} \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{(\theta+\pi)^2} \right) d\theta =$$

$$\frac{(2\theta+\pi)\pi}{\theta^2(\theta-\pi)^2} \simeq \frac{1}{\theta^3}$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta+\pi} \right]_{2\pi}^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(+\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{3\pi} \right) = \frac{1}{12} \frac{1}{\pi}$$