Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 25, 2 dicembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Passaggio al limite / derivazione sotto il segno di int.

RICORDIAMO CHE SE

$$F(x) = \int_A f(x,y)\,dy$$ (IN S. IMPROPRIO)

se so che:

- $x \longmapsto f(x,y)$ è continua e y fissato

e se

- $|f(x,y)| \le g(y)$ con g integrabile su A

$\Longrightarrow$ $F(x)$ è continua

Se inoltre so anche

- $\forall\, x, y \ \exists\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ e
- $\left|\frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\right| \le g_1(y)$ g_1 integrabile

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} F(x)$ esiste $\forall x$

OSSERVIAMO CHE (*) IMPLICA:

Se
- $\lim_{x \to x_0} f(x,y) = \ell(y) \quad \forall y \in A$
- $|f(x,y)| \leq g(y) \quad \forall x\, y$, g integrabile

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} F(x) = \int_A \ell(y)\,dy$$

PER RICONDURMI ALL'ENUNCIATO PRECEDENTE, BASTA DEFINIRE $f(x_0, y) = \ell(y)$

CONTROESEMPIO

$$F(x) = \int_0^1 \underbrace{\frac{y\, e^{-\frac{y^2}{x}}}{x^2}}_{f(x,y)}\, dy \qquad \text{per } x > 0$$

VEDO CHE $\forall y$ $\lim_{x \to 0^+} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{y\, e^{-\frac{y^2}{x}}}{x^2} = 0$

IN EFFETTI se $y = 0$ questo è ovvio

SE $y \neq 0$ so che $e^{-\frac{y^2}{x}} \to 0$ più velocemente di x^2

QUINDI POTREI ESTENDERE $f(0,y)=0$

($\Rightarrow$ f è continua in x per ogni y fissato)

PROVIAMO A VEDERE SE $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_0^1 0\, dy = 0$

USIAMO IL CAMBIO DI VARIABILE $\frac{y^2}{x} = t$ $(x>0)$

$y = \sqrt{tx}$ $\quad dy = \sqrt{x}\,\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^{1/x} \frac{\sqrt{tx}\, e^{-t}}{x^2} \sqrt{x}\,\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{x}\int_0^{1/x} e^{-t}\, dt$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} F(x) = (+\infty)\cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt}_{=1} = +\infty \neq 0$$

SE AVESSI PRESO $F(x) = \int_0^1 \frac{y}{x} e^{-\frac{y^2}{x}}\, dy$

AVREI TROVATO $\lim_{x\to 0^+} \frac{y}{x} e^{-\frac{y^2}{x}} = 0$

e $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \int_0^1 \frac{y}{x} e^{-\frac{y^2}{x}} = \int_0^{+\infty} e^{-t} d = 1$

NOTA: DATO CHE NON SI PUÒ SCAMBIARE LIMITE E INTEGRALE $\Rightarrow$ $f(x,y)$ NON È CONTINUA RISPETTO A (x,y) NEI PUNTI $(0,y)$ (AVENDO MESSO $f(0,y)=0$)
NON È CONTINUA IN $(0,0)$

- INOLTRE NON POSSO TROVARE g integrabile con $|f(x,y)| \le g(y)$

ESEMPIO $\boxed{a>0}$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-ax} \dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{se } x>0 \\ e^{-ax}\, y & \text{se } x=0 \end{cases}$$

$$F(y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

PROBLEMA 1 F è continua ??

MI SERVE TROVARE g(x) integrabile su $[0, +\infty]$

$$|f(x,y)| = e^{-ax} \frac{|\sin(xy)|}{x} \leq g(x)$$

USO LA DIS. $|\sin(t)| \leq |t| \Rightarrow$

$$|f(x,y)| \leq e^{-ax} |y| \quad \triangle$$

ALLORA SE FISSO $y_0 \in \mathbb{R}$ POSSO DIRE

$$|f(x,y)| \leq e^{-ax} |y_0+1| \quad \forall x$$
$$\forall y \in [-|y_0|-1, |y_0|+1]$$

Allora posso applicare il teorema, limitato g ha $[-|y_0|-1, |y_0|+1] \Rightarrow F(y)$ è continua in y_0

NOTA Nel teorema basta trovare $\overset{\varepsilon>0}{\forall}$ g integrabile per cui

$$|f(x,y)| \leq g(x) \quad \forall y \in A \quad \forall x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$$

DUNQUE F è continua in y

$\left(\text{per esempio } \lim_{y \to +\infty} F(y) = 0 \right)$

← PROBLEMA 2 F è derivabile in y ?!

Mi serve $g_1(x)$ integrabile tale che

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \right| \leq g_1(x)$$

$\forall x \in [0, +\infty]$
$\forall y$ (← VICINO AL PTO y_0 IN CUI VOGLIO DERIVARE ←)

$$\frac{e^{-ax} \cos(xy) \cdot x}{x} = e^{-ax} \cos(xy)$$

SI HA $\left| e^{-ax} \cos(xy) \right| \leq e^{-ax}$ INTEGRABILE

$\Longrightarrow$ F è derivabile e vale

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(xy)\, dx$$ ← INTEGRALE CALCOLABILE

FACCIAMOLO PASSANDO AI COMPLESSI . .

$$e^{-ax}\underbrace{(\cos(xy)+i\sin(xy))}_{\text{limitat}} \to 0$$

$$\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-ax+ixy}\,dx =$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-(a+iy)x}}{-a+iy}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} = \mathrm{Re}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-ax+ixy}-1}{-a+iy}$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{a-iy} = \mathrm{Re}\,\frac{a+iy}{a^2+y^2} = \frac{a}{a^2+y^2}$$

DUNQUE $\quad F'(y) = \dfrac{a}{a^2+y^2}$

$$\Rightarrow \quad F(y) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{F(0)} + \int_0^y \frac{a}{a^2+t^2}\,dt$$

(VISTO PRIMA)

$$\frac{a}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}\,dt = \arctan\left(\frac{y}{a}\right)$$

DUNQUE $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}\sin(xy)}{x}\,dx = \arctan\left(\frac{y}{a}\right)$

ESEMPIO. Si può definire per $x>0$

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{x-1} e^{-t}}_{f(x,t)} dt$$

$t \mapsto f(x,t)$ è integrabile in t perché

- su $]0,1]$ $\leq \frac{1}{t^{1-x}}$ e $1-x<1$
- su $[1,+\infty[$ "vince" e^{-t}

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0+1 = 1$$

– VEDIAMO CHE $\Gamma(n+1) = n!$

$\Uparrow$

Vediamo quanto fa $\Gamma(x+1) =$ $(x>0)$

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{t^x}_{F(t)} \underbrace{e^{-t}}_{G'(t)} dt = \left[t^x(-e^{-t})\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} (t^x)' e^{-t} dt$$

$\Leftarrow G(t) - e^{-t}$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} x\, t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\,\Gamma(x)$$

FORMULA $\forall x > 0$ si ha $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

(si potrebbe vedere che Γ è UNIVOCAMENTE DETERMINATA DA questa relazione + $\Gamma(0)=1$)

CONSEGUENZA $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PER INDUZIONE: $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$$
$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 6$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n+1) = n!$$

- Γ è derivabile: se $f(x,t) = t^{x-1} e^{-t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t} =$$

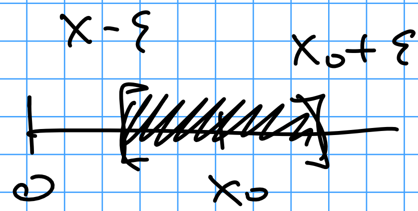
$$e^{(x-1)\ln(t)} \cdot \ln(t)\, e^{-t} = \ln(t)\, t^{x-1} e^{-t}$$

FISSATO $x_0 > 0$ si ha che $\forall x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$

$$|\ln(t)\, t^{x-1} e^{-t}| \leq |\ln(t)|\, e^{-t}\, t^{x_0-1-\varepsilon}$$

è INTEGRABILE SU $]0,+\infty[$

purché $x_0 - 1 - \varepsilon > 0$



$\Longrightarrow$ POSSO APPLICARE IL TEOREMA e TROVO

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln(t)\, e^{-t}\, dt$$

CI SONO ALTRE PROPRIETÀ INTERESSANTI:

- (PROPRIETÀ DI RIFLESSIONE)

$$\boxed{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(x\pi)}}$$

(lungo da dimostrare)

$$\Longrightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} \iff \boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$$

COLLEGAMENTO COL VOLUME DEL DISCO n-DIMENSIONALE

$$B_N = \{ x \in \mathbb{R}^N : \quad \|x\| \le 1 \}$$

$$\| \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1$$

$$|B_N| = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{N/2}}{N\,\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \qquad \otimes$$

VEDIAMO SE TORNA CON I CASI $N = 1/2/3$

$\underline{N=1}$ $\quad B_1 = [-1, 1] \Rightarrow |B_1| = 2$

LA FORMULA $\otimes$ MI DÀ

$$\frac{2\,\pi^{1/2}}{1\,\Gamma(1/2)} = 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 2 \qquad \text{TORNA}$$

$\underline{N=2}$ $\quad B_2 = \{x^2 + y^2 \le 1\}$; LA $\otimes$ MI DÀ:

$$\frac{2\,\pi^{2/2}}{2\,\Gamma(2/2)} = \pi$$

$\underline{N=3}$ $\quad B_3 = \{x^2+y^2+z^2 \le 1\}$, LA $\oplus$ $\Rightarrow$

$$\frac{2\,\pi^{3/2}}{3\,\Gamma(3/2)} = \frac{2}{3}\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)} = \frac{4}{3}\pi \quad \left(\frac{3}{2} = \frac{1}{2}+1\right)$$

<u>OSS.</u> Se prendo la palla di raggio R trovo

$$|B_N(R)| = |B_N(1)|\,R^N$$

Segue dal cambio di variabile:

$$|B_N(R)| = \int_{B_N(R)} 1\,dx = R^N \int_{B_N(1)} 1\,d\hat{x}$$

$$x = R\hat{x}, \quad \hat{x} \in B_N(1)$$

$$J = \begin{pmatrix} R & & 0 \\ & R & \\ & \ddots & \\ 0 & & R \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J| = R^N$$

DEFINENDO OPPORTUNAMENTE LA SUPERFICIE (N-DIM).

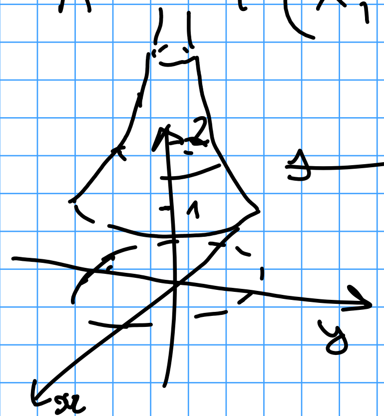
SI VEDE:

$$\text{Area}(\partial B_N) = N\,|B_N|$$

$$\frac{|B_N|}{|\partial B_N|} = \frac{1}{N}$$

ESERCIZIO $\alpha \in \mathbb{R}$ parametro.

$$A = \left\{ (x,y,z) : \; x^2+y^2 \leq \frac{1}{z^\alpha}, \; z \geq 1 \right\}$$



1 — 2

I° DOMANDA per quali α $|A| < +\infty$.

CONVIENE "AFFETTARE" CON PIANI PARALLELI AL PIANO x,y

$$|A| = \int_1^{+\infty} |A_z| \, dz \qquad A_z = \left\{ x^2+y^2 \leq \frac{1}{z^\alpha} \right\}$$

$\Downarrow$

CERCHIO DI RAGGIO $\frac{1}{z^{\alpha/2}}$

$$\int_1^{+\infty} \pi \frac{1}{z^\alpha} \, dz = \pi \left[\frac{z^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{+\infty} \quad (\text{se } \underline{\alpha > 1})$$

$$= \frac{\pi}{\alpha - 1} \quad \text{se } \alpha > 1$$

II° DOMANDA

Per quali α è integrabile la funzione

$$f(x, y, z) = xyz$$