Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 24, 26 novembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

AVVISO: OGGI LEZIONE ALLE 16.30 aula A26

DOMANI NON C'È LEZIONE

ABBIAMO DETTO CHE LA NOZIONE DI INT. IMPROPRIO IN $\mathbb{R}^N$ SI RIESCE A FARE

(I) per le funzioni ≥ 0

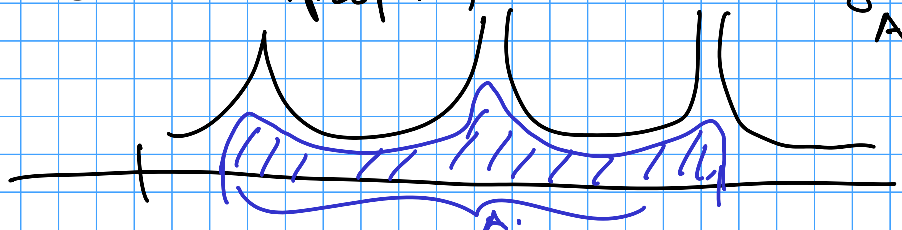
(II) per le funzioni "assolutamente integrabili"

RICORDO CHE se $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $\forall R$ rettangolo $A \cap R$ mis, CONTINUA eccetto che su E trascurabile $\Rightarrow$

(I) se $f \geq 0$ definisco

$$\int_A f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_{A_1} g(x)\,dx \;\middle|\; A_1 \subset A,\ A_1 \text{ mis},\ g \leq f,\ g \text{ limitata} \right\}$$

(in senso improprio)



Questo integrale è ≥ 0, ma può essere $+\infty$

Dico che f è integrabile (in senso improprio) se $\int_A f\,dx < +\infty$

(II) In generale, dico che f è int. (in senso improprio) se $|f|$ è int. in senso improprio e chiamo integrale di f

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A f^+(x)\,dx - \int_A f^-(x)\,dx$$

SONO FINITI IN QUANTO $\leq \int_A |f(x)|\,dx$

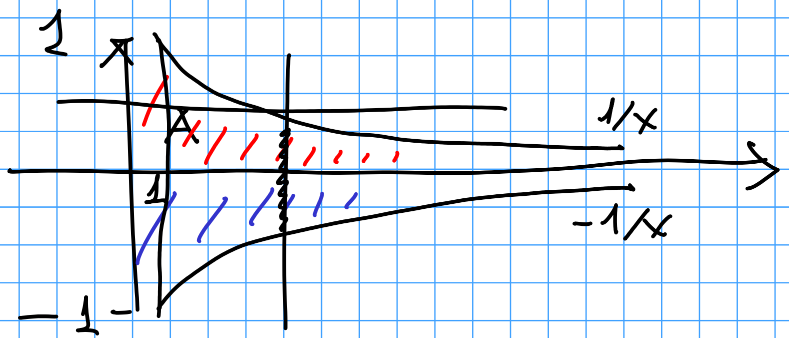
(IN UNA VARIABILE QUESTE SONO LE FUNZIONI ASSOLUTAM. INTEGRABILE)

PER LE FUNZIONI INTEGRABILI NEL SENSO APPENA DETTO VALE ANCORA IL TEOREMA DI FUBINI $\sim$

$$\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy\right)dx = \dots$$

CONTROESEMPIO PUÒ CAPITARE CHE GLI INTEGRALI ITERATI SIANO DIVERSI A SECONDA DELL'ORDINE

- SE f NON È INTEGRABILE



$\mathbb{R}$

$A = \{ (x, y) : -\frac{1}{x} < y < \frac{1}{x} , x > 1 \}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Se faccio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^{+\infty} 0 \, dx = 0$

IN ALTERNATIVA POTREI FARE

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{1/y} f(x,y)\, dx \right) dy =$$

$$-\int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy + \int_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy \approx -\infty + \infty \;??$$

ESEMPIO (FUBINI PER INT. IMPROPRI)

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{su } \mathbb{R}^2$$

$f \geq 0$, continua $\Rightarrow$ HA SENSO CONSIDERARE

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \quad (\text{potrebbe essere } +\infty)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x,y)\,dx\,d$$

dove A_n è una qualunque successione di insiemi limitati e misurabili tale da

$$A_n \subset A_{n+1} \quad e \quad \underbrace{\bigcup_n A_n = \mathbb{R}^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \ \exists\, n : x \in A_n$$

- Possiamo prendere $A_n = [-n,n] \times [-n,n]$

$$\Rightarrow \iint_{A_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-n}^{n}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\,dx\right)dy =$$

$$\int_{-n}^{n}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\right)dy = \int_{-n}^{n} e^{-y^2}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\,dx\right)dy =$$

$$\left(\int_{-n}^{n}e^{-y^2}\,dy\right)\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\,dx\right) = \left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

$$\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \qquad (\in \mathbb{R})$$

- Possiamo anche prendere $A'_n = B(0,n)$;

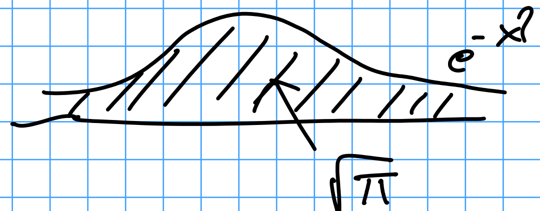
cerchio

$$\iint_{A'_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \overset{\text{coordinate polari}}{=} \int_0^n\left(\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\, d\theta\right)d\rho =$$

$$\pi\int_0^n 2\rho\, e^{-\rho^2}\,d\rho \underset{t=\rho^2}{=} \pi\int_0^{n^2} e^{-t}\,dt = -\pi\left(e^{-n^2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi$$

DUNQUE $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$



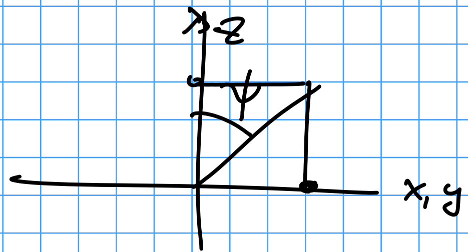
ESERCIZIO

$$\iiint_A \frac{x^2}{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$A = \{ \; 1 < x^2+y^2+z^2 < 2 \;, \quad x^2-y^2+z^2 < 0 \;, \quad y>0$$

CONVIENE PASSARE A COORDINATE POLARI IN $\mathbb{R}^3$:

$$x = \rho \cos\theta \sin\psi$$
$$z = \rho \sin\theta \sin\psi$$
$$y = \rho \cos\psi$$



$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\psi \,, & -\rho\sin\theta\sin\psi \,, & \rho\cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \,, & \rho\cos(\theta)\sin\psi \,, & \rho\sin\theta\cos\psi \\ \cos\psi \,, & 0 & , -\rho\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$|\det J| = \cos\psi \cdot \sin\psi\cos\psi(-\rho^2)$$
$$-\rho\sin\psi\,\sin^2\psi\,\rho \qquad =$$

$$\rho^2\sin\psi$$

L' INSIEME DIVENTA:

$$1<\rho^2<2, \quad \rho^2\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)-\rho^2\cos^2(\psi)+\rho^2\sin^2(\theta)\sin^2(\psi)<0, \quad 0<\psi<\frac{\pi}{2}$$

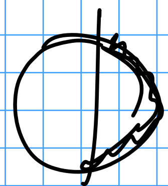
$$\Updownarrow$$

$$\sin^2(\psi)-\cos^2(\psi)<0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(2\psi)>0$$

$$\Updownarrow$$



$$2\psi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2}\pi,2\pi\right]$$

$$\psi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\cancel{\left[\frac{3}{4}\pi,\pi\right]} \leftarrow y>0$$

$$\Rightarrow \int_1^{\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/4}\frac{\cos^2(\theta)\sin^2\psi}{\sin^2(\psi)}\sin\psi\,d\psi\right)d\theta=$$

$$\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}\right)\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\psi\,d\psi=$$

PROBLEMA LEGATO AGLI INTEGRALI.

$$F(x) = \int_A f(x,y)\,dy \qquad y \in A \subset \mathbb{R}^N$$

Sapendo che f è continua $\overset{??}{\Longrightarrow}$ F è continua

Sapendo che f è derivabile rispetto a x $\overset{??}{\Longrightarrow}$ F è derivabile ??

<u>ESEMPIO</u> $$\int_0^1 e^{-xy^2}\,dy = F(x)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy = F_1(x) \longleftarrow \text{ESAMINIAMO QUESTO}$$

definito per $\underline{\underline{x > 0}}$

per vedere come dipende da x posso fare un cambio di variabile

$$xy^2 = t^2 \iff y = \sqrt{\frac{t^2}{x}} = \frac{t}{\sqrt{x}} \qquad t = \sqrt{x}\,y$$

$$dy = \frac{dt}{\sqrt{x}}$$

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \quad = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

SONO RIUSCITO A CALCOLARE F_1 !!

Se faccio lo stesso su $F(x)$ trovo :

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\, G(\sqrt{x})$$

E' UN PO' PIÙ COMPLICATO, MA NON CI SONO PROBLEMI A VEDERE CHE

- F è continua su $\{x>0\}$
- $F'(x)$ esiste se $x>0$ e fa

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\, G'(\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) =$$

derivo $G(\sqrt{x}) \Rightarrow G'(\sqrt{x})(\sqrt{x})'$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2x}\, e^{-x}$$

$e^{-(\sqrt{x})^2}$ NOTA CHE

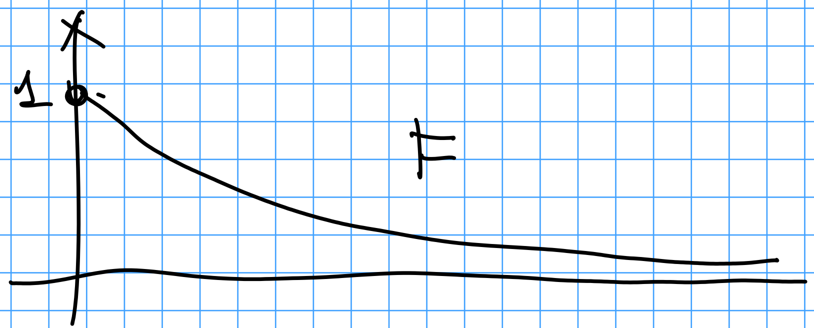
$$G'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = e^{-x^2}$$

• $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dx = 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

• $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt}{\sqrt{x}} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\cdot\cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}{\cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}}}} = e^0 = 1$

DUNQUE HO TROVATO QUASI TUTTO SU $F(x)$



TRUCCO DI CAMBIARE VARIABILE
(CHE NON È SEMPRE POSSIBILE)

(per la decrescenza vedi dopo)

IN GENERALE CI SONO DEI TEOREMI

1° CASO INTEGRALE DI RIEMAN (NON IMPROPRIO)

TEOREMA A limitato misurabile di $\mathbb{R}^M$

(a) $(x,y) \mapsto f(x,y)$ CONTINUA NELLA COPPIA DI VARIABILI

$x \in \mathbb{R}^N \qquad y \in A \subset \mathbb{R}^M$

ALLORA $F(x) := \int_A f(x,y)\,dy$ È CONTINUA

(b) Supponiamo inoltre che $\exists \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)$, $j = 1 \ldots N$ e che siano continue rispetto a $\boxed{(x,y)}$. ALLORA

$$\exists \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,dy$$

(si può derivare sotto il segno di integrale)

CONTROLLIAMO QUESTO TEOREMA NELLA $F(x)$ di prima.

$$F(x) = \int_0^1 e^{-xy^2}\,dy$$

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{d}{dx} e^{-xy^2}\,dy = \int_0^1 -y^2 e^{-xy^2}\,dy \quad \left(< 0 \Rightarrow F \text{ decresce} \right)$$

VIENE SPONTANEO CONTROLLARE SE È LO STESSO TROVATO PRIMA

PER QUESTA VERIFICA FACCIAMO IL CAMBIO DI VAR. $t = \sqrt{x}\,y$

$$\left(\begin{array}{l} \Downarrow \\ y = \frac{t}{\sqrt{x}} \\ dy = \frac{dt}{\sqrt{x}} \end{array} \right)^{\times}$$

IN $F'(x) \longrightarrow -\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{x} e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dt =$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^3}} \int_0^{\sqrt{x}} t^2 e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{x^3}} \int_0^{\sqrt{x}} t \cdot t e^{-t^2}\,dt = \text{(per parti)}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^3}} \left(\left[t \cdot \left(-\frac{e^{-t^2}}{2} \right) \right]_0^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt \right) =$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2x} e^{-x} \quad \text{(quello di prima \underline{TORNA})}$$

CASO DEGLI INTEGRALI IMPROPRI

TEOREMA

$$F(x) = \int_A f(x,y)\, dy$$ (IN SENSO IMPROPRIO — A può non essere limitato / f può essere illimitato)

(a) SUPPONIAMO CHE ESISTA $g(y) \geq 0$ integrabile in senso improprio su A tale che

$$|f(x,y)| \leq g(y) \quad \forall x, \ \forall y \in A$$

~ UNIFORMITÀ RISPETTO A x

E SUPPONIAMO CHE $x \mapsto f(x,y)$ È CONTINUA A y FISSATO

ALLORA $F(x)$ è ben definito ($f(x,y)$ è int. in y SENSO IMPROPRIO)

$F(x)$ È CONTINUA IN x

cioè $$\lim_{x \to x_0} \int_A f(x,y)\, dy = \int_A \lim_{x \to x_0} f(x,y)\, dy$$

(posso scambiare limite e integrale)

(b) Se oltre a quanto detto sopra suppongo che

- $\exists \ \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y) \quad \forall y \in A \quad \forall x$
- $\exists \ g_1(y)$ integrabile su A tale che

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y) \right| \leq g_1(y) \quad \forall x \quad \forall y \in A$$

ALLORA ESISTE

$$G(x) := \int_A \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\, dy$$

e $\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = G(x)$ (posso scambiare $\frac{\partial}{\partial x_j}$ con $\int_A$)

NEL CASO $F_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} \left(= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$

Se prendo $x_0 > 0$ considero $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow$

$$\cdot \left| e^{-xy^2} \right| \leq \underbrace{e^{-(x_0-\delta)y^2}}_{g(y)} \quad \text{INTEGRABILE}$$

e omologamente

$$\left| -y^2 e^{-xy^2} \right| \leq \underbrace{y^2 e^{-(x_0-\delta)y^2}}_{g_1(y)} \quad \text{INT.}$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} y^2 e^{-xy^2} \, dy$$

(FACENDO IL CAMBIO DI VARIABILE SI VEDE CHE TORNA CON $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)