Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 23, 25 novembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

ESERCIZI DI INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

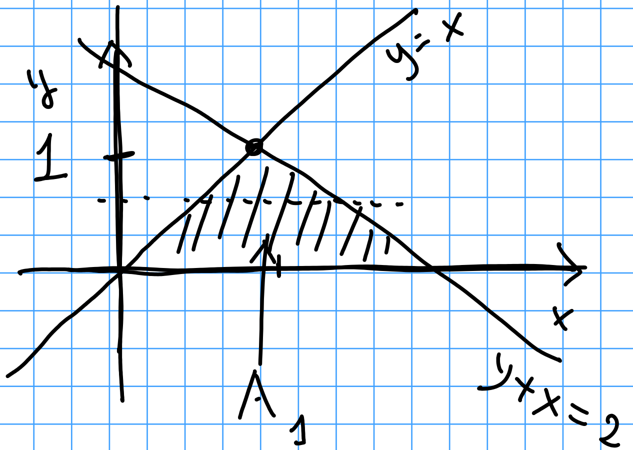
$A = \{ (x,y,z) : 0 \leq y \leq x , x+y \leq 2 , 0 \leq z \leq 1 \}$

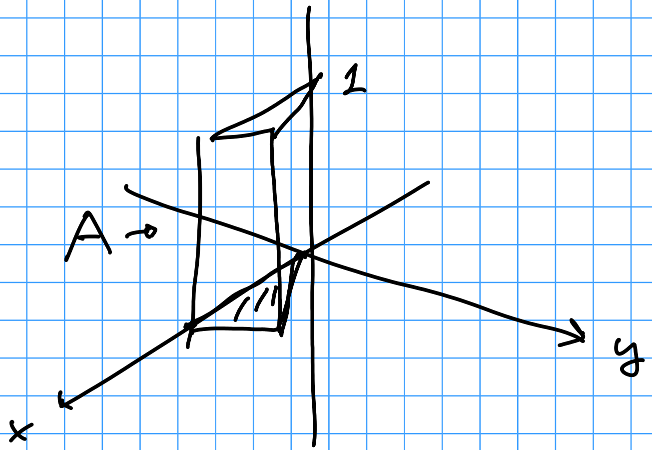
$$\iiint_A z e^{x+y} \, dx \, dy \, dz = (*)$$

Come è fatto A?

$A = \{ (x,y) \in A_1 , 0 \leq z \leq 1 \}$

$A_1 = \{ 0 \leq y \leq x , x+y \leq 2 \} =$
$\{ 0 \leq y \} \cap \{ y \leq x \} \cap \{ x+y \leq 2 \}$





$$(*) = \iint_A e^{x+y} \left(\int_0^1 z \, dz \right) dx dy = \iint_A e^{x+y} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 dxy =$$

$$\frac{1}{2}\iint_A e^{x+y}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_y^{2-y} e^{x+y}\,dx\right) dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\, e^{x+y} \Big]_{x=y}^{x=2-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^2 - e^{2y}\right) dy =$$

$$\frac{1}{2}\left(e^2 - \left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

SI POTEVA ANCHE CALCOLARE (sezionando A_1 "verticalmente")

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left(\int_0^x e^{x+y}\,dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} e^{x+y}\,dy\right) dx\right) \;\ldots$$

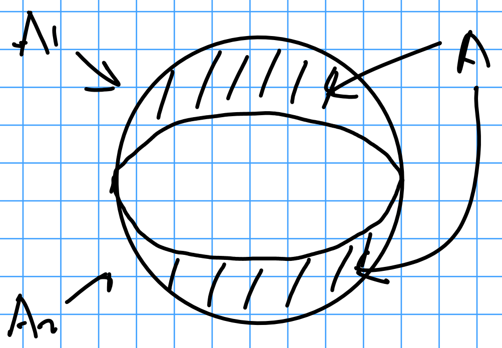
$$A = \left\{ (x,y) : \; x^2+y^2 \le 1 \,, \; x^2+4y^2 \geq 1 \right\}$$

CALCOLARE IL "MOMENTO D'INERZIA" RISPETTO A O :

$$\iint_A \left(x^2+y^2\right) dx\,dy$$

$\{x^2+y^2 \le 1\}$ CERCHIO DI RAGGIO 1 CENTRO $\bar{O}$

$\{x^2+4y^2 \le 1\}$ ELLISSE CHE PASSA PER $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1/2)$



I MODO (senza coordinate polari)

$$\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\iint_{A_1} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$2\int_{-1}^{1}\left(\int_{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\right)dx =$$

$$4\int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$4\int_0^1 \left(x^2\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right)dx =$$

$$4\int_0^1\left(\frac{5}{24}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{7}{24}\sqrt{1-x^2}\right)dx = \quad \text{COMPLICATO}$$

PROVIAMO A USARE LE COORDINATE POLARI / "ELLITTICHE"

CONVIENE VEDERE $A = C \setminus E$

$\underset{\text{cerchio}}{C}$ $\underset{\text{ellisse}}{E}$

$$\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_C (x^2+y^2)\,dx\,dy - \iint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} \rho^2\cdot\rho\,d\theta\right)d\rho$$

$$\left(\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin t\end{cases} \Rightarrow \det_J=\rho\right)$$

$$2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_E (x^2+y^2)\,dy\,dy$$

$$x=\rho\cos(\theta)$$
$$y=\frac{\rho}{2}\sin(\theta)$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \frac{1}{2}\sin(\theta) + & \frac{\rho}{2}\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \det(J) = \frac{\rho}{2}$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\rho^2\cos^2\theta + \frac{\rho^2}{4}\sin^2\theta\right)\frac{\rho}{2}\,d\rho\right)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{8}\cos^2(\theta) + \frac{\rho^4}{32}\sin^2(\theta)\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2(\theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{4}\right)d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2(\theta)\right)d\theta$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{32}\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{32}\pi = \frac{5}{32}\pi$$

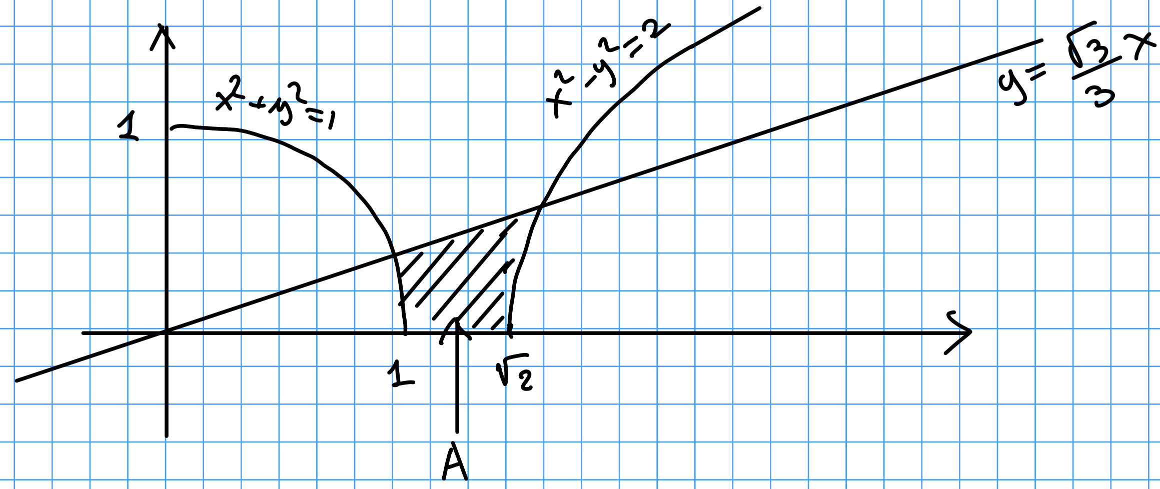
$\cancel{}$ SI SA ...

ALLA FINE VIENE $\frac{\pi}{2} - \frac{5}{32}\pi = \frac{11}{32}\pi$

$$\int_A \frac{16xy}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)^2}\,dx\,dy \qquad \text{dove}$$

$$A = \left\{ x^2+y^2 \geq 1 \,,\; x^2 - y^2 \leq 2 \,,\; 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x \right\}$$

A ??



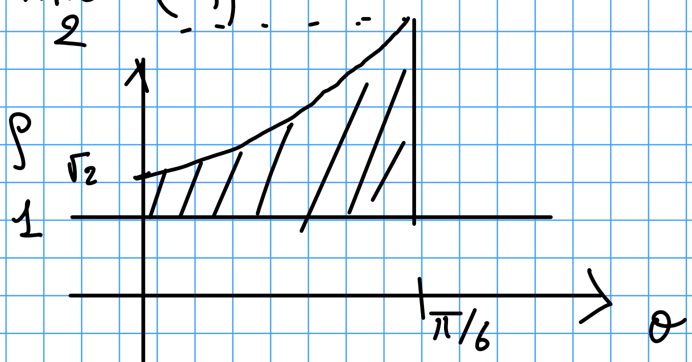
PASSIAMO IN COORDINATE POLARI

A DIVENTA $\{(\rho,\theta) \quad \rho\geq 1,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6},\ \rho^2\underbrace{(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))}_{\cos(2\theta)}\leq 2\}$

NEL PIANO (ρ,θ):

$$\rho^2\leq\frac{2}{\cos(2\theta)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\rho\leq\sqrt{\frac{2}{\cos(2\theta)}}$$

NEL PIANO (θ,ρ)



$$\Rightarrow \text{INT.} = \int_0^{\pi/6} \left(\int_1^{\sqrt{\frac{2}{\cos(2\theta)}}} \frac{16\, \cancel{\rho^2} \sin\theta \cos(\theta)}{\cancel{\rho^2} (\rho^2+2)^2} \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/6} \left[-8 \frac{1}{\rho^2+2} \right]_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{\frac{2}{\cos(2\theta)}}} \sin(\theta)\cos(\theta) \, d\theta =$$

$$8\int_0^{\pi/6} \left(-\frac{1}{\frac{2}{\cos(2\theta)}+2} + \frac{1}{3} \right) \sin(\theta)\cos(\theta)\, d\theta =$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{\pi/6} \sin(2\theta) - 2\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(2\theta)\sin(2\theta)}{1+\cos(2\theta)} \, d\theta =$$

$$\frac{4}{3}\,\frac{1}{2}\Big[-\cos(2\theta)\Big]_0^{\pi/6} + \int_1^{1/2} \frac{u}{1+u}\, du = \qquad u = \cos(2\theta)$$

$$du = -2\sin(2\theta)\, d\theta$$

$$\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}+1\right) - \int_{1/2}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{1+u}\, du = -\frac{1}{6} + \ln(1+u)\Big|_{u=1/2}^{u=1} =$$

$$-\frac{1}{6} + \ln 2 - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{6} + \ln\frac{4}{3}$$

"INTEGRALI IMPROPRI" $\to$ $\begin{cases} \text{FUNZIONI ILLIMITATE} \\ \text{DOMINI ILLIMITATI} \end{cases}$

IN $\mathbb{R}^N$ NON C'È UN "MODO STANDARD" DI REPLICARE L'APPROCCIO USATO IN $\mathbb{R}$

IN $\mathbb{R}^N$ SI DEFINISCE L'INT IMPROPRIO SE $\boxed{f \geq 0}$

TALE CHE $A \cap R$ è misurabile per ogni rettangolo R

DATO A, possibilmente illimitato e dato $f : A \to \mathbb{R}$ possibilmente illimitato, f continua eccetto che su un insieme $A_0 \subset A$ tale che $|A_0| = 0$, $f \geq 0$

CHIAMO INTEGRALE IMPROPRIO DI f su A

$$\sup \left\{ \int_{A'} f(x)\,dx \quad A' \subset A,\ A' \text{ limitato},\ f \text{ limitata su } A' \right\}$$

A' misurabile

PUÒ VENIRE $+\infty$. Dico che l'integrale improprio converge se viene $< +\infty$.

PER ESEMPIO, se f è limitata, continua, $f \geq 0$ trovo che

$$\int_A f(x)\,dx \ (\text{in senso improprio}) = \lim_{n \to \infty} \int_{A \cap R_n} f(x)\,dx$$

dove $R_n = [-n, n] \times \cdots \times [n, n]$

QUI HO USATO $A \cap R_n$, ma ($\text{se } f \geq 0$) QUALUNQUE

FAMIGLIA (A_n) di insiemi misurabili, $A_n \subset A$

tali che A = UNIONE DI A_n, $A_n \subset A_{n+1}$

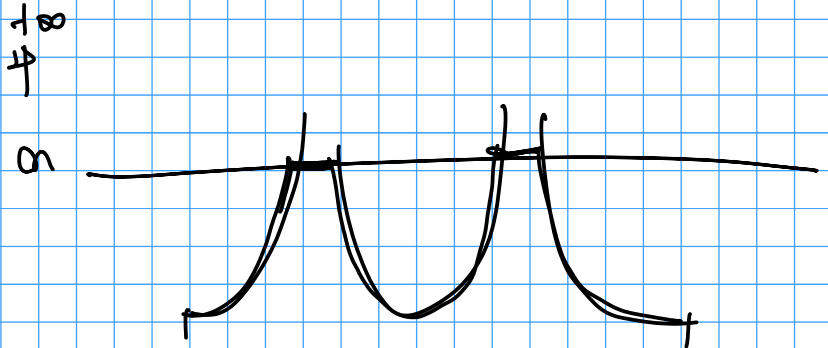
HA LA PROPRIETÀ CHE

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f(x)\,dx$$

Se INVECE A è limitato, ma f non è limitata

(ma $f \geq 0$) trovo che

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_A \min(f(x), n)\,dx$$



$A \cap R$ misurabile $\forall R$

IDEA LA MISURA DI UN INSIEME ILLIMITATO A è SUP $\{ |A'| \; A'$ limitato misurabile, $A' \subset A \}$

DUNQUE GLI INSIEMI MISURABILI HANNO SEMPRE UNA MISURA (FINITA O INFINITA)

ESEMPIO IN $A=\{x^2+y^2\leq 1\}$ $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}=\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}$

$$\iint_A \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}\,d\mathbf{x} =$$

$\mathbf{x}=(x,y)$

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{A\setminus A_n}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}\,d\mathbf{x}$$ dove $A_n=\{x^2+y^2\leq \frac{1}{n^2}\}$

$$\| \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_{1/n}^{1}\underbrace{\frac{1}{\rho^\alpha}\,\rho}_{\rho^{1-\alpha}}\,d\rho\right)d\theta =$$

$$2\pi\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{1/n}^{1}$$ (METTIAMO CHE $\alpha\neq 2$)

$$2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\alpha}\left(1-\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)$$ $\nearrow \dfrac{1}{2-\alpha}$ se $\alpha<2$; $\searrow +\infty$ se $\alpha>2$

se $\alpha=2$ .... $\longrightarrow +\infty$

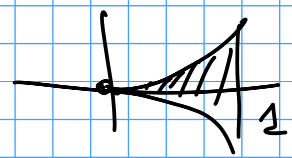
DUNQUE IN $\mathbb{R}^2$

$f(x) = \dfrac{1}{\|x\|^\alpha}$ è INT. SU $B(0,\varepsilon)$ $\iff$ $\alpha < 2$

(SE SI FA IL CALCOLO IN $\mathbb{R}^N$ SI TROVA $\alpha < N$)

SE INVECE DI INTEGRARE SU $B(0,1)$

INTEGRO SU $A = \{ |y| < x^2, \ 0 \le x \le 1 \}$



$$\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)} = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} \frac{1}{(x^2+y^2)} \, dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right]_{-x^2}^{x^2} dx \qquad \frac{d}{dy} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x} \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{x} \arctan(x) \, dx \leftarrow \text{FINITO} \qquad = \frac{1}{x^2+y^2}$$

perché $\dfrac{\arctan(x)}{x} \to 1$ se $x \to 0$

DUNQUE $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ È INTEGRABILE SU QUESTO A – NON LO È SU $B(0,1)$.