Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 22, 20 novembre 2013

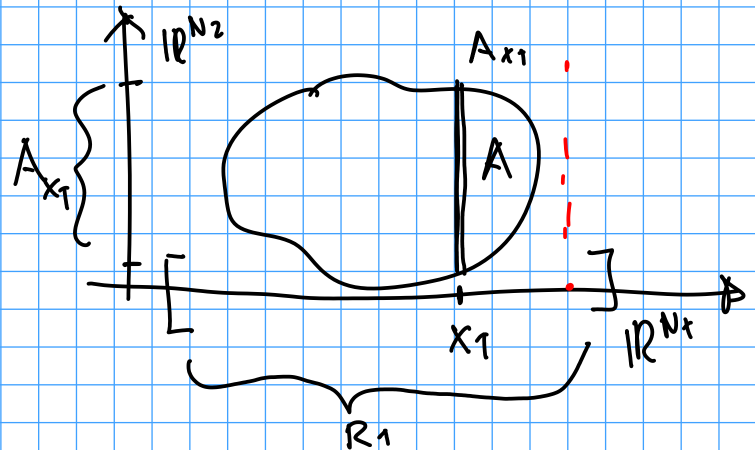
(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

OSS. Il teorema di Fubini, in particolare si applica al calcolo della misura di un insieme (misurabile) A

$$A \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2} \qquad x = (x_1, x_2) \qquad x_1 \in \mathbb{R}^{N_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{N_2}$$

Dato x_1 in $\mathbb{R}^{N_1}$ posso considerare la "sezione"

$$A_{x_1} = \{ x'' \in \mathbb{R}^{N_2} : (x_1, x'') \in A \}$$

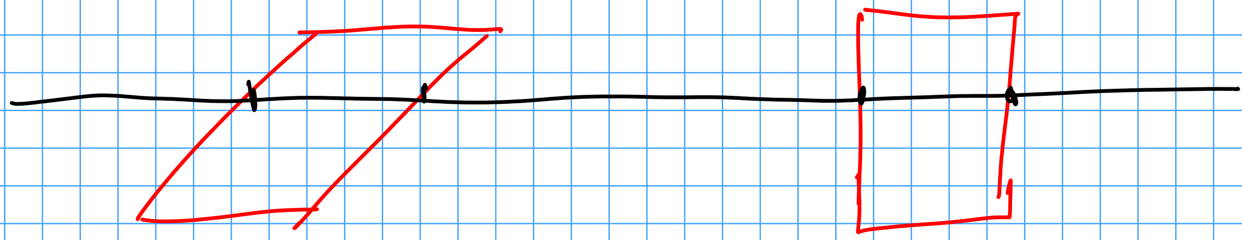


$$A \subset R = R_1 \times R_2$$

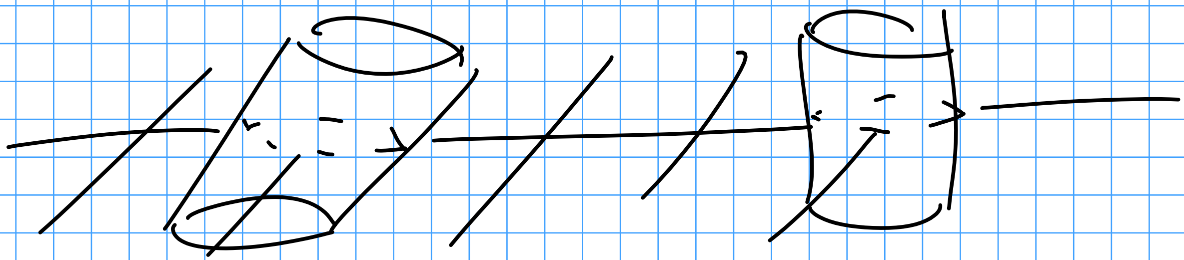
Allora il teorema di Fubini dice che

$$|A| = \int_{R_1} |A_{x_1}| \, dx_1$$

$\sim$ PRINCIPIO DI CAVALIERI :



Se due figure (due solidi) sono tali che proprietà che tutte le sezioni parallele a un piano prefissato hanno la stessa misura $\Rightarrow$ hanno la stessa area (vol.)



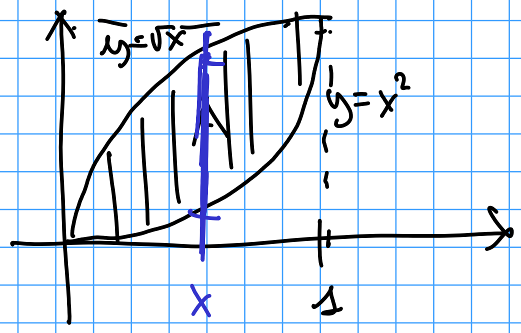
$$\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad \text{dove} \qquad R=\{0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\}$$

$$\parallel$$

$$\int_0^1\left(\int_1^2 x^2+y^2\,dy\right)dx = \int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_1^2 dx$$

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}x\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$\int_A xy \, dx\, dy \qquad A = \{ 0 < x < 1, \; x^2 < y < \sqrt{x} \}$$



APPLICANDO FUBINI

Prendo $R = [0,1] \times [0,1]$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \tilde{f}(x,y) \right) dx = \circledast$$

dove:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } (x,y) \in A \\ 0 & \text{se } x,y \notin A \end{cases}$$

ALLORA $\circledast = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx =$

$$\int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\right) dx$$

$$\left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

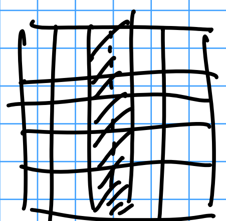
ESEMPIO RELATIVO A FUBINI (in cui qualcosa va male..)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0,\ y \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x = 0\ \ y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mi chiedo se f è integrabile su $R = [-1,1] \times [-1,1]$

f è continua escetto che nei pti $(0,y)$ $-1 \leq y \leq 1$

Tali pti formano un insieme trascurabile $\Rightarrow$ f è integrabile



Se si applica la def (con un po' di pazienza)

si vede che $\displaystyle\int_R f = 0$

COSA SUCCEDE SE APPLICO FUBINI

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy \qquad \underline{\text{HA SENSO}}$$

INFATTI SE FISSO $y \in [-1,1]$ la funzione

$$x \mapsto f(x,y) \quad \text{vale} \begin{cases} 0 & \text{se } y \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \neq 0, \ 1 \text{ se } x=0, & (y \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

IN ENTRAMBI I CASI $x \mapsto f(x,y)$ è integrabile

(nel secondo caso lo è perché è continua tranne che in $x=0$)

e $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx = 0$

se integro rispetto a y trovo $\displaystyle\int_{-1}^{1} 0\,dy = 0 \left(= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy\right)$

SE VADO NELL'ALTRO VERSO: FISSO X

$$y \mapsto f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \text{funzione di Dirichlet} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ALMENO IN $x=0$ NON HA SENSO

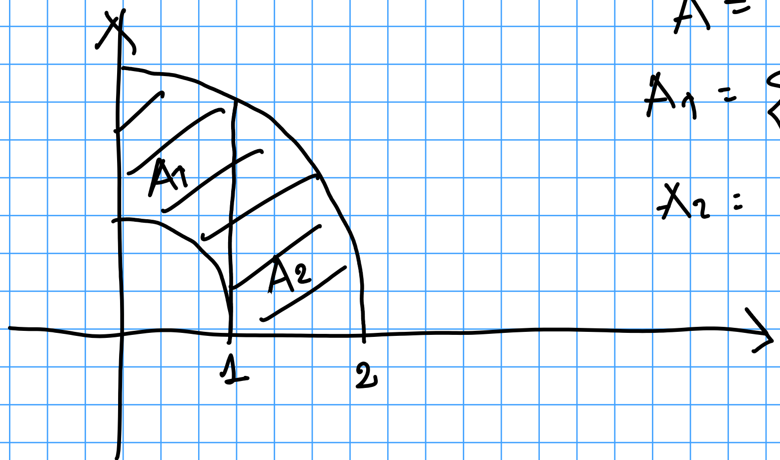
$$\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy \qquad ??$$

ANCHE SE $f(x,y)$ è integrabile su $R \subset \mathbb{R}^2$

su alcune sezioni (POCHE...) può non essere integrabile (rispetto a $\mathbb{R}$)

ALTRO ESERCIZIO

$$\int_A \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad A=\{1<x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0\}$$



$A = A_1 \cup A_2$

$A_1 = \{0<x\leq 1,\ \sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{4-x^2}\}$

$A_2 : \{1<x<2,\ 0<y<\sqrt{4-x^2}\}$

potrei anche mettere $\leq$

(in quel caso $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

però è trascurabile)

$$\int_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \frac{x}{2} \Big[\ln(x^2+y^2) \Big]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\ln\left(x^2+4-x^2\right) - \ln\left(x^2+1-x^2\right)\right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x \ln(4)\,dx = \frac{\ln(4)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\ln(4)}{4}$$

$$\int_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy \right) dx =$$

$$\int_1^2 \frac{x}{2} \Big[\ln(x^2+y^2) \Big]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 x \left(\ln(4) - \ln(x^2) \right) dx = \frac{\ln(4)}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 x \ln(x)\,dx =$$

$$\frac{\ln(4)}{4}(4-1) - \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx \right) =$$

$$3\frac{\ln 4}{4} - 2\ln(2) + \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx = \frac{3}{4}\ln 4 - \ln 4 + \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$$

$$-\frac{1}{4}\ln 4 + \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\ln(4) + \frac{3}{4}$$

AGGIUNGO IL PRIMO PEZZO $\Rightarrow$

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{4}$$

FORMULA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILE

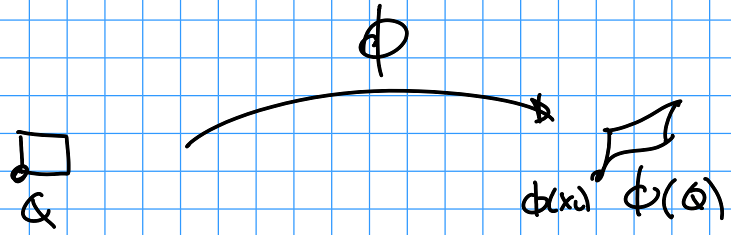
<u>Teorema</u> $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto, limitato, misurabile,

(∂A trascurabile)

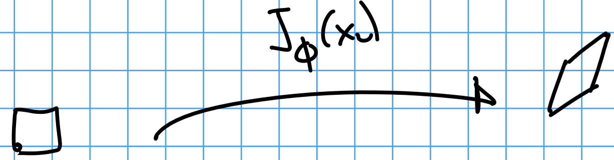
$\Phi : A \to \mathbb{R}^N$ iniettivo, differenziabile

tale che $\det J_\Phi(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in A$

IDEA:



Se Q è piccolo posso approssimare ϕ con $d\phi(x)$



$$\det(J_\phi(x_0)) = \frac{\text{volume}(J_\phi(Q))}{\text{volume}(Q)}$$

Abbiamo anche $f : \phi(A) \to \mathbb{R}$

(NOTA: ϕ^{-1} è continua, e quindi $\phi(A)$ è un aperto ed è misurabile)

TESI

$$\int_{\phi(A)} f(x)\,dx = \int_A f(\phi(y))\,|\det J_\phi(y)|\,dy$$

ESEMPIO (IMPORTANTE) CAMBIAMENTO IN COORDINATE POLARI

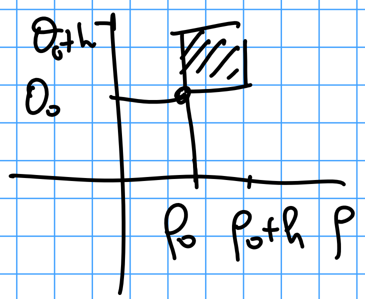
SIAMO IN $\mathbb{R}^2$; scriviamo $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$

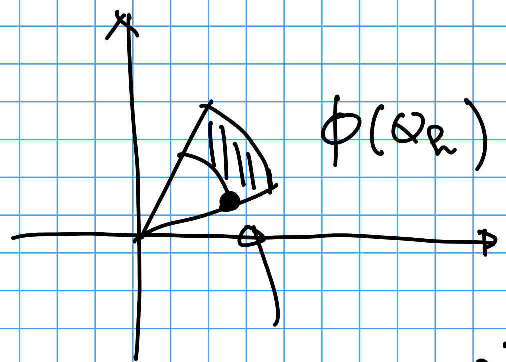
DUNQUE $\phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \end{pmatrix}$

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\theta), & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta), & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\det J_\phi(\rho, \theta) = \rho$$

(IDEA: $Q_h(\rho, \theta) = \{\rho_0 \le \rho \le \rho_0 + h,\ \theta_0 \le \theta \le \theta_0 + h\}$





misura $\simeq h^2\rho_0$)

APPLICANDO LA formula: data $f: \phi(A) \to \mathbb{R}$ si ha:

$$\left[\begin{array}{c} \displaystyle\int_A f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cdot\rho \, d\rho\, d\theta \\ \parallel \\ \displaystyle\int_{\phi(A)} f(x,y)\, dx\, dy \end{array}\right] \quad (\star)$$

(ci sarebbe anche la condizione ϕ sia iniettiva - questo non è vero per qualunque A - in effetti ϕ non è iniettiva se $\rho=0$ e sui θ e $\theta+2\pi k$ ...)

PERÒ DI SOLITO IL PROBLEMA SI SUPERA

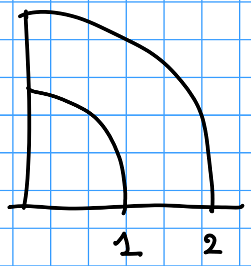
PROVIAMO AD APPLICARE $(\star)$ nell'ultimo esercizio

$$\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy \qquad \text{dove } D = \{1 < x^2+y^2 < 4, \ x>0, y>0\}$$

SE SCELGO $A = \{(\rho,\theta) \ 1<\rho<2, \ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\}$

$D = \phi(A)$

cioè $(x,y) \in A \iff \begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ con $\begin{cases} 1<\rho<2 \\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \end{cases}$



$$\Downarrow$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}=\rho\right)$$

APPLICANDO LA FORMULA:

$$\int_A f(\rho\cos(\theta),\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\|$$

$$\int_1^2\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\,\rho\,d\theta\right)d\rho =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2\rho\left(\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)\,d\theta\right)d\rho = \frac{1}{2}\int_1^2\rho\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)\,d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}(4-1)\left(-\cos(\pi)+\cos(0)\right) = \frac{3}{4}$$