Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 21, 19 novembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

<u>VISTO</u> : • Def. di integrabilità / integrale per funzioni
$f : R \to \mathbb{R}$, dove R è un rettangolo di $\mathbb{R}^N$

• Definizione di insieme trascurabile / insieme misurabile (A misurabile $\iff \partial A$ è trascurabile)
• Def di funzione integrabile su A misurabile

$$\left(\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad \text{integrabile su } R \supset A \right)$$

<u>OSS.</u> Se A è limitato allora (si può dim.)

A misurabile $\iff$ $1_A(x)$ è integrabile dove

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

(su un R rettangolo : $A \subset R$)

1_A si chiama funzione caratteristica di A

L'integrale $\int_R 1_A(x)\,dx =: |A|$ si chiama "misura di A"

(o volume N-dimensionale di A)

<u>PROPRIETÀ</u> (1) Se A è trascurabile e che f sia integrabile

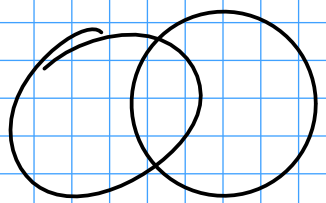
su A

$$\Rightarrow \int_A f(x)\,dx = 0$$

(2) Se A e B misurabili $\Rightarrow A \cup B$, $A \cap B$ misurabili

Se inoltre $|A \cap B| = 0$ allora $|A \cup B| = |A| + |B|$

(in generale $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$)



(3) Se A e B misurabili, f integrabile su $A \cup B$

$\Leftrightarrow$ f è integrabile su A e su B.

Inoltre se $|A \cap B| = 0$ $\Rightarrow$

$$\int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$$

TEOREMA DI FUBINI

Sia R un rettangolo di $\mathbb{R}^N$. Se $N_1 + N_2 = N$

posso scrivere $x \in \mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2)$ $x_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{N_2}$

Posso allora vedere R come $R_1 \times R_2$ con R_1 rettangolo in $\mathbb{R}^{N_1}$

e R_2 rettangolo in $\mathbb{R}^{N_2}$

Analogamente se $f : R \to \mathbb{R}$ posso scrivere

$$f(x) = f(x_1, x_2) \qquad x_1 \in R_1 \quad x_2 \in R_2$$

Se f è continua, allora

$$x_1 \mapsto \int_{R_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$$

$$x_2 \mapsto \int_{R_1} f(x_1, x_2)\, dx_1$$

CONTINUE E

$$\int_R f(x)\, dx = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 =$$

$$\int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2$$

PIÙ IN GENERALE SE f è integrabile e se supponiamo che:

(a) Per ogni $x_1 \in R_1$ la funzione $x_2 \to f(x_1, x_2)$ sia integrabile su R_2

(b) La funzione $x_1 \mapsto \int_{R_2} f(x_1, x_2)\,dx_2$ sia integrabile su R_1

ALLORA $$\int_R f(x)\,dx = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 \right) dx_1$$

NE SEGUE CHE, se valgono (a) e (b) scambiando x_1 e x_2, vale anche

$$\int_R f(x)\,dx = \int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x_1, x_2)\,dx_1 \right) dx_2$$

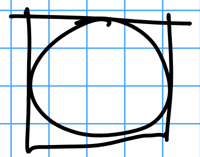
(e quindi i due "integrali iterati" coincidono.

LA FORMULA FUNZIONA QUANDO HA SENSO

ESEMPIO

$A = \{x^2+y^2 \le 1\}$ $\qquad |A| = ??$

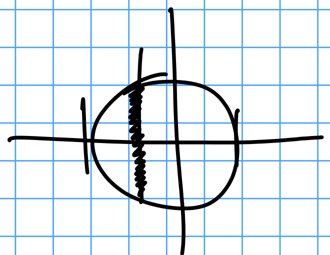
$\Longleftrightarrow \int_R 1_A(x)\,dx$ dove $R = [-1,1]\times[-1,1]$



1_A (non è continua) è integrabile in quanto è continua eccetto su $S = \{x^2+y^2 = 1\}$ TRASCURABILE

$$|A| \overset{(??)}{=} \int_R 1_A(x) = \int_{-1}^{1} \Big(\underbrace{\int_{-1}^{1} 1_A(x,y)\,dy}_{??} \Big)\,dx$$

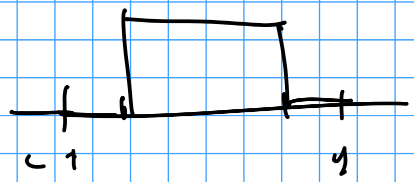
Dato x si può fare $\int_{-1}^{1} 1_A(x,y)\,dy$?!



Dato $x \in [-1,1]$ $\qquad 1_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a funzione di y



discontinua solo in $\pm\sqrt{1-x^2}$

e $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1_{A(x,y)}\, dy = 2\sqrt{1-x^2}$ $\quad (\forall x \in [-1,1])$

QUINDI

$$|A| = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\, dx$$

(e esiste, MA ESISTE PERCHÉ $\sqrt{1-x^2}$ è continua in x)

⋮ (fare i conti ..)

π