Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 20, 18 novembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

Minimizzare $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sul vincolo

$$\{ \underbrace{x+y=2}, \quad (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1 \}$$

(RIVISITAZIONE DEL VECCHIO ESERCIZIO) $\Downarrow$

$$G_1 = x+y-2$$
$$G_2 = x^2+y^2+z^2-1$$

Cerco λ e $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2$$

(NEL PTO DI MIN.)

$$\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_2 = 2\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda + \mu\, 2(x-1) \\ 2y = \lambda + \mu\, 2(y-1) \\ 2z = \mu\, 2(z-1) \leftarrow \\ x+y = 2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$2(x-1)+2-\lambda = 2\mu(x-1)$$

$$\begin{cases} 2-\lambda = 2(\mu-1)(x-1) \\ 2-\lambda = 2(\mu-1)(y-1) \\ 2 = 2(\mu-1)(z-1) \\ (x-1)+(y-1) = 0, \quad (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-\lambda)(x-1) = 2(\mu-1)(x-1)^2 \\ (2-\lambda)(y-1) = 2(\mu-1)(y-1)^2 \\ 2(z-1) = 2(\mu-1)(z-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2(z-1) = 2(\mu-1)$$

$$\boxed{z=\mu}$$

$\Downarrow$ SOMM.

$$(2-\lambda)\underbrace{(x+y-2)}_{=0} + 2(z-1) = 2(\mu-1)\left[\underbrace{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}_{=1}\right]$$

DALLA III^a RIGA $\Rightarrow$ $(z-1)^2 = 1 \Rightarrow z = \mu = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$

METTO $(\mu-1) = \pm 1$ nelle prime 2 righe:

$$2-\lambda = 2(\pm 1)(x-1)$$
$$2-\lambda = 2(\pm 1)(y-1)$$

$$2(\pm 1)(x-1) = 2(\pm)(y-1) \Rightarrow x=y$$

DA $x+y=2 \Rightarrow x=y=1$

$\Downarrow$ SOLUZIONI

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

PTO DI MINIMO

RISULTATO COLLEGATO

TEOREMA $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ DIFFERENZIABILE

$x_0 : G(x_0) = y_0$ e $\det(J_G(x_0)) \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ $J_G(x_0)$ è invertibile)

ALLORA $\exists$ U intorno aperto di x_0 tale che G è invertibile da $U \to G(U)$, G^{-1} è continua ed è differenziabile

($\Rightarrow$ $G(U)$ è un aperto),

$$J_{G^{-1}}(y) = \left(J_G(G^{-1}(y))\right)^{-1} \quad \forall y \in G(U)$$

$$\Updownarrow$$

$$J_{G^{-1}}(y) = J_G(x)^{-1} \quad \text{dove } G(x) = y$$

Se $J_G(x_0)$ INVERTIBILE $\Rightarrow$ G è "localmente" invertibile

---

TEOREMA Supponiamo di avere $G_1 \dots G_K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$K < N$. Sia $M = \{ x \in \mathbb{R}^N : G_1(x) \leq 0, \dots, G_K(x) \leq 0 \}$

Sia f definita in aperto $U \to \mathbb{R}$ con $M \subset U$

$f, G_1, \dots G_K$ differenziabili

Sia $x_0 \in M$ di max/min vl. per f su M.

Supponiamo che:

$\nabla G_j(x_0)$, per gli indici j tali che $G_j(x_0)=0$, siano lin. indip.

ALLORA $\exists \lambda_1 - \lambda_K \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_K \nabla G_K(x_0)$$

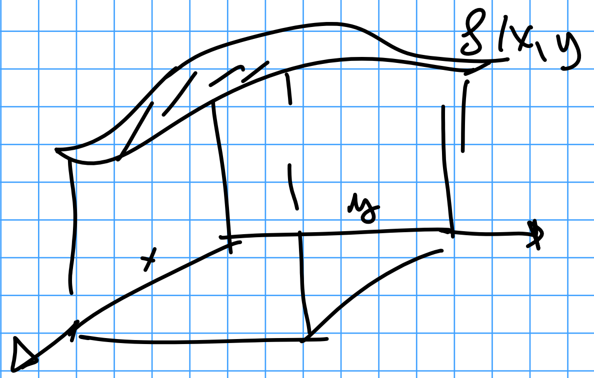
$$e \quad \lambda_j = 0 \quad \text{se} \quad G_j(x_0) < 0$$

(Kühn-Tucker)

INTEGRALE DI RIEMANN IN $\mathbb{R}^N$

COMINCIAMO CON IL CONSIDERARE $f: R \to \mathbb{R}$, limitata dove R è un rettangolo (N dimensionale), limitato

$$R = \underbrace{[a_1, b_1]}_{I_1} \times \dots \times \underbrace{[a_N, b_N]}_{I_N}$$



CHIAMO "SUDDIVISIONE" di R

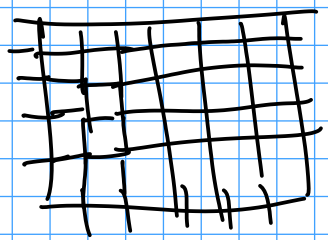
N suddivisioni dei rispettivi $I_1 \dots I_N$

$$\sigma_1 = \{a_1 = x_0^1 < x_1^1 < \dots < x_{n_1}^1 = b_1\}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_N = \{a_N = x_0^N < x_1^N < \dots\ x_{m_N}^N = b_N\}$$

$$\Downarrow$$



produce una famiglia di rettangoli la cui unione è R

$$\sigma = \{\text{rettangoli individuati da } \sigma_1 \dots \sigma_N\}$$

PER ESEMPIO $N=2$

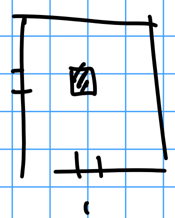
Data una suddivisione σ posso considerare

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sup_{x \in R_{ij}} f(x)\, |R_{ij}|$$

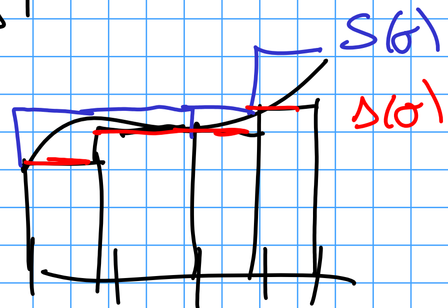
dove

$$R_{ij} = [x_{i-1}^1, x_i^1] \times [x_{j-1}^2, x_j^2]$$

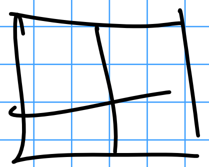
$$|R_{ij}| = \text{volume di } R_{ij} = \underbrace{(x_i^1 - x_{i-1}^1)\cdot(x_j^2 - x_{j-1}^2)}_{\text{BASE} \times \text{ALTEZZA}}$$



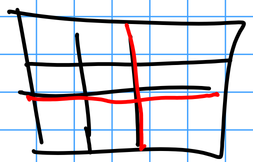
$$s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \inf_{x \in R_{ij}} f(x) \, |R_{ij}|$$



DEF Date σ_1 è più fine di σ_2 se i punti che individuano σ_2 sono contenuti nei punti che individuano σ_1



σ_2



σ_1

FATTO Se σ_1 è più fine di σ_2 $\Rightarrow$

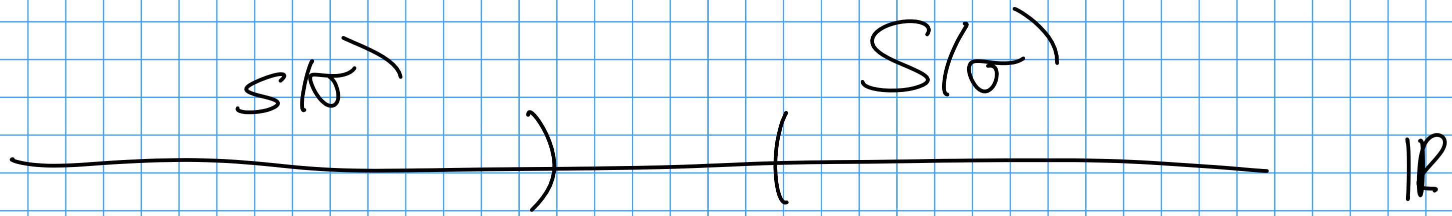
$$s(\sigma_2) \leq s(\sigma_1) \leq S(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$$

$\Rightarrow$ date comunque σ_1 e σ_2 suddivisioni di R

$$s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$$

INFATTI SI TROVA σ più fine di σ_1 e σ_2 (mettendo insieme tutti i punti) e allora

$$s(\sigma_1) \le s(\sigma) \le S(\sigma) \le S(\sigma_2)$$



DEF. Posso definire:

$$\overline{\int_R} f(x)\,dx := \inf_\sigma S(\sigma) \qquad \text{(integrale superiore)}$$

$$\underline{\int_R} f(x)\,dx = \sup_\sigma s(\sigma) \qquad \text{(integrale inferiore)}$$

SE COINCIDONO CHIAMO INTEGRALE IL VALORE COMUNE e dico che f è integrabile.

ESISTONO FUNZIONI NON INTEGRABILI: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(e si può fare anche in $\mathbb{R}^2$ ...)

TEOREMA Se f è continua $\Longrightarrow$ f è integrabile

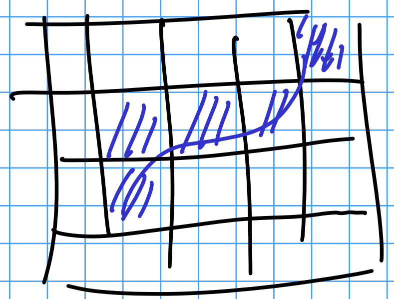
NO DIM.

NOTA Se f è Lip. si può rifare la dim dell'anno scorso

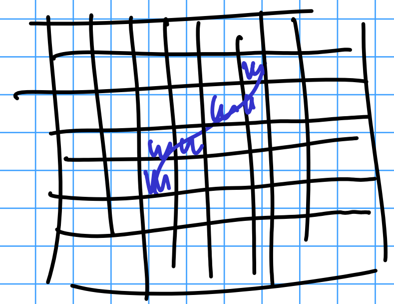
CONVIENE DEFINIRE GLI "INSIEMI TRASCURABILI" IN $\mathbb{R}^N$

DEF SIA E un insieme limitato di $\mathbb{R}^N$.
Sia R un rettangolo di $\mathbb{R}^N$ con $E \subset R$.

Dico che E è TRASCURABILE se $\forall \varepsilon > 0$ esiste una suddivisione di R tale che



$$\sum_{R_{ij} \cap E \neq \emptyset} |R_{ij}| < \varepsilon$$

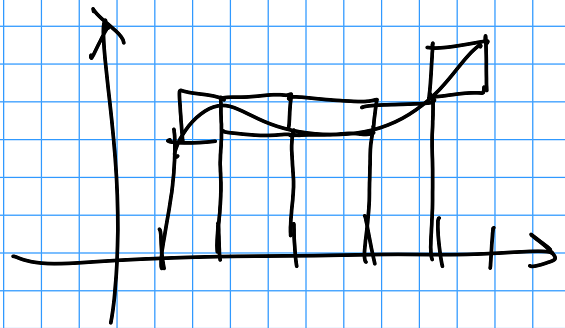


ESEMPI · UN SEGMENTO è TRASCURABILE IN $\mathbb{R}^2$

· Se $f: R \to \mathbb{R}$, R è un rettangolo di $\mathbb{R}^N$, f integrabile

$\Rightarrow$ il grafico di $f = \{(x,y) : x \in R \text{ e } y = f(x)\}$

è trascurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$



$\Uparrow$

CARATTERIZZAZIONE f è integrabile su $R \iff \forall \varepsilon > 0$

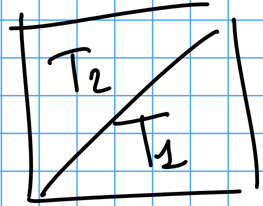
esiste una suddivisione σ di R tale che

$$0 \leq S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$$

TEOREMA Sia $f: R \to \mathbb{R}$, limitata e tale che

esiste $E \subset R$, E trascurabile, f continua in $R \setminus E$

$\Longrightarrow$ f è integrabile.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in T_1 \\ 1 & \text{se } x \in T_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

INTEGRABILE

<u>FATTO</u> Se f è integrabile su R e g coincide con f eccetto che su un insieme trascurabile ($\{x : f(x) \neq g(x)\}$ è trascurabile) $\Longrightarrow$ g è integrabile e $\int_R f\,dx = \int_R g\,dx$

<u>TEOREMI VARI</u>

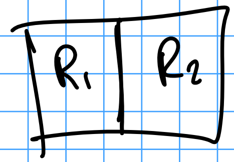
(a) (LINEARITÀ) : f, g integrabili, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\lambda f + \mu g$ integrabile e $\int_R (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_R f + \mu \int_R g$

(b) (MONOTONIA) $f \geq 0$, f integrabile $\Longrightarrow$ $\int_R f \geq 0$

(se $f \geq g \Longrightarrow \int_R f \geq \int_R g$)

(c) Sia $R = R_1 \cup R_2$ con R_1, R_2 rettangoli

$R_1 \cap R_2$ è trascurabile



f integrabile su $R \iff f$ int su R_1 e su R_2

inoltre $\displaystyle\int_R f(x)\,dx = \int_{R_1} f(x)\,dx + \int_{R_2} f(x)\,dx$

DEF. (INSIEME MISURABILE) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato

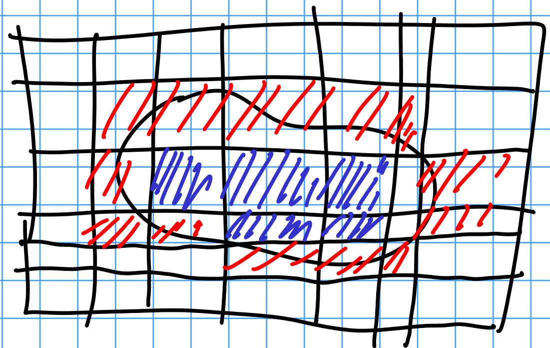
Sia R rettangolo tale che $A \subset R$

Per ogni suddivisione σ di R. Posso considerare

$A(\sigma)^+ = \bigcup$ rettangoli R' della suddivisione con $R' \cap A \neq \emptyset$

$A(\sigma)^- = \bigcup$ rettangoli R' della suddivisione con $R' \subset A$

$$A(\sigma)^- \subset A \subset A(\sigma)^+$$



Dico che A è misurabile

$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \sigma$ tale che

$$|A(\sigma)^{+} - A(\sigma^{-})| < \varepsilon$$

$//$

SOMMA DI $|R'|$ per tutti gli R' che formano $A(\sigma)^{+}$ e non sono in $A(\sigma)^{-}$

FATTO Se A è tale che ∂A è trascurabile $\Rightarrow$ A è misurabile

---

$$\int_A f(x)\,dx$$ se A è misurabile ??

Data f limitata definita su A $\sim$

Introduco la funzione $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ f(x) & \text{se } x \in A \end{cases}$

Se A è misurabile (e limitato) dove R è rettangolo $A \subset R$.

DEFINISCO $\int_A f(x)\,dx = \int_R \tilde{f}(x)\,dx$

(per farlo devo verificare che $\tilde{f}$ è integrabile su R e che l'operazione non dipende da R)

IN PARTICOLARE POSSO INTEGRARE UNA FUNZIONE CONTINUA SU UN INSIEME A del tipo

$A = \{x \in R : G(x) \le 0\}$ se G è CONTINUA

MISURABILE PERCHÉ LA SUA FRONTIERA È TRASCURABILE

(TALE FRONTIERA è contenuta in $\partial R \cup \{G = 0\}$)