Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 19, 12 novembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

VISTO: se $G: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ + IPOTESI $\Rightarrow \mathcal{M}\{x : G(x) = 0\}$ è una superficie di dimensione $N-1$

PIÙ IN GENERALE POSSIAMO CONSIDERARE $N = M + K$ e $G: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$, differenziabile.

$$\mathcal{M} := \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) = 0 \}$$

NOTA: Se $G = (G_1, \dots, G_K) \Rightarrow$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \dots \cap \mathcal{M}_K \quad \text{dove} \quad \mathcal{M}_i := \{ x : G_i(x) = 0 \}$$

(vediamo che con opportune ipotesi $\mathcal{M}$ è una superficie di dimensione M — nel caso visto $K = 1$)

CONVIENE SCRIVERE $x = (\hat{x}, x')$ per ogni x di $\mathbb{R}^N$ dove $\hat{x} \in \mathbb{R}^M$, $x' \in \mathbb{R}^K$

Se guardiamo la Jacobiana $J_G(x)$ vediamo che

$$J_G(x) = \left(\underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial G_1}{\partial \hat{x}_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial \hat{x}_M} \\ \frac{\partial G_K}{\partial \hat{x}_1} & \dots & \frac{\partial G_K}{\partial \hat{x}_M} \end{matrix}}_{\hat{J}_G(\hat{x}, x')} \quad \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial G_1}{\partial x'_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x'_K} \\ \frac{\partial G_K}{\partial x'_1} & \dots & \frac{\partial G_K}{\partial x'_K} \end{matrix}}_{J'_G(\hat{x}, x')} \right)$$

IPOTESI $x_0 \in \mathcal{M}$ con $J'_G(x_0)$ INVERTIBILE

TESI $\exists$ U intorno di $x_0 = (\hat{x}_0, x_0')$ (in $\mathbb{R}^N$)

A intorno di $\hat{x}_0$ in $\mathbb{R}^M$, e $g : A \to \mathbb{R}^K$

differenziabile, $g(\hat{x}_0) = x_0'$ e tale che

$$\mathcal{M} \cap U = \{ (\hat{x}, x') : \hat{x} \in A \text{ e } x' = g(\hat{x}) \}$$

CONSEGUENZA Se definisco $\phi(\hat{x}) = (\hat{x}, g(\hat{x}))$

questo $\phi : A \to \mathbb{R}^N$, $\phi(A) = \mathcal{M} \cap U$, ϕ

è una parametrizzazione di $\mathcal{M} \cap U$ come

superficie di dimensione M

INOLTRE il piano tangente a $\mathcal{M}$ in un punto $(\hat{x}, g(\hat{x}))$

è generato da $\frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_1} \dots \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_M}$ che sono

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_i} = {}^t\Big(0 \dots \underset{i}{1} \dots 0, \frac{\partial g^1}{\partial \hat{x}_i} \dots \frac{\partial g^K}{\partial \hat{x}_i}\Big) \quad (1)$$

CHE SONO CHIARAMENTE LIN. IND.

INOLTRE $\nabla G_1(x) \dots \nabla G_k(x)$ sono

k vettori ortogonali al piano tangente a M in x

QUESTO SEGUE (PER ESEMPIO) dal fatto che

$$\left(g: A \to \mathbb{R}^k \quad A \subset \mathbb{R}^M\right)$$

$$J_g(\hat{x}) = -\underbrace{J'_G(\hat{x}, g(\hat{x}))^{-1} \hat{J}_G(\hat{x}, \hat{g}(\hat{x}))}_{K \times M}$$

2

MATRICE $K \times K$
che è invertibile per ipotesi

K RIGHE
M COLONNE
$(K \times M)$

Mettendo insieme 1 e 2 si deduce che

$$\nabla G_i \perp \frac{\partial}{\partial x_j} \phi$$

$\rightsquigarrow$ TEOREMA DI PUNTI CRITICI VINCOLATI.

TEOREMA (MOLTIPLICATORI)

Sia $G : \mathbb{R}^{M+K} \to \mathbb{R}^{k}$ tale che $J'_G(x_0) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{M}$

e sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile

con $x_0 \in U$. Supponiamo che x_0 sia di max/min

rel. per f ristretta a $\mathcal{M}$ $\Longrightarrow$

(geometricamente) $\nabla f(x_0)$ è ortogonale al piano tangente

a $\mathcal{M}$ in x_0

$\Longrightarrow$ $\exists\ \lambda_1 \dots \lambda_K$ tali che:

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_K \nabla G_K(x_0)}$$

$\left(\text{dove} \quad G(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ \vdots \\ G_K(x) \end{pmatrix} \right)$

ESEMPIO (DI IERI RIVISTO)

MINIMIZZARE $\quad f(x) = x^2 + y^2 + z^2 \quad$ su

$$\mathcal{M} = \{ (x,y,z) : \underbrace{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}_{G_1} = 1,\ \underbrace{x+y}_{G_2} = 2 \}$$

$$\Updownarrow$$

$$G(x,y,z) = 0 \quad \text{dove} \quad G(x,y,z) = \begin{pmatrix} G_1(x,y,z) - 1 \\ G_2(x,y,z) - 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla G_1(x,y,z) = 2 \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla G_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_G = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 2(x-1) & 2(y-1) \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{\text{INVERTIBILE}} & \begin{matrix} 2(z-1) \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

LA CONDIZIONE DI PTO STAZ VINCOLATO È:

$$\cancel{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cancel{2}\lambda \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} + \frac{\mu}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad + \ G_1 = G_2 = 0$$

DALL' ULTIMA RIGA $z = \lambda(z-1) \iff$

$(\lambda-1)z = \lambda \iff z = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, $\lambda \neq 1$

METTIAMO z nelle altre due $\left(\boxed{\lambda = \frac{z}{z-1}} \right.$ $z \neq 1$

$$\begin{cases} x = \lambda(x-1) + \mu/2 \\ y = \lambda(y-1) + \mu/2 \end{cases}$$

$x - \lambda(x-1) = y - \lambda(y-1)$

DOMANI LEZIONE
8.30 – 10.30