Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 18, 11 novembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

PROBLEMA Considerata la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e raggio 1, nel piano $x+y=2$ (in $\mathbb{R}^3$)

TROVARE LA DISTANZA DALL'ORIGINE DI $\mathcal{C}$,

cioè

$$\min\{d((x,y,z),(0,0,0)) : (x,y,z)\in\mathcal{C}\}$$

$$\mathcal{C}=\left\{(x,y,z) : \begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\ x+y=2 \quad \leftarrow \circledast\end{cases}\right\}$$

Possiamo usare la condizione $x+y=2$ per ricondurci a 2 variabili:

$y=2-x$

$\mathcal{C}$ diventa $\{(x,z) : (x-1)^2+(1-x)^2+(z-1)^2=1\}=$

$\{(x,z) : 2(x-1)^2+(z-1)^2=1\}$

e $d((x,y,z),(0,0,0))$ diventa

$$\|(x,2-x,z)\|=\sqrt{x^2+(2-x)^2+z^2}$$

Posso dunque cercare il minimo di $(f(x,z)=\|\cdot\|^2)$

$f(x,z) = x^2 + (2-x)^2 + z^2$ sul vincolo

$$M = \{ \underbrace{2(x-1)^2 + (z-1)^2}_{g(x,z)} = 1 \}$$

(se trovo $x, z \Rightarrow y = 2 - x$ e quindi trovo (x, y, z))

USIAMO IL METODO DEI MOLTIPLICATORI ;

$$\nabla f(x,z) = \begin{pmatrix} 2x - 2(2-x) \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 4 \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x,z) = \begin{pmatrix} 4(x-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$$

devo trovare le sol. di $\nabla f = \lambda \nabla g$ su $M \iff$

$$\begin{cases} 4x - 4 = \lambda\, 4(x-1) \\ 2z = \lambda\, 2(z-1) \\ 2(x-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$$

DALLA I^o RIGA : $\lambda = 1$ o $x = 1$

Prendiamo $\underline{\lambda = 1}$ $\Rightarrow$ $0 = 2$ IMPOSSIBILE

DUNQUE $\boxed{x = 1}$

Dalla III° $\Rightarrow$ $z - 1 = \pm 1 \iff z = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$

(volendo si ricava dalla II° $\Rightarrow x = \begin{cases} 2 & \text{se } z = 2 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$)

$\Rightarrow$ i punti stazionari "vincolati" (e M) sono

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in corrispondenza dei quali la f

$\downarrow \qquad \downarrow$

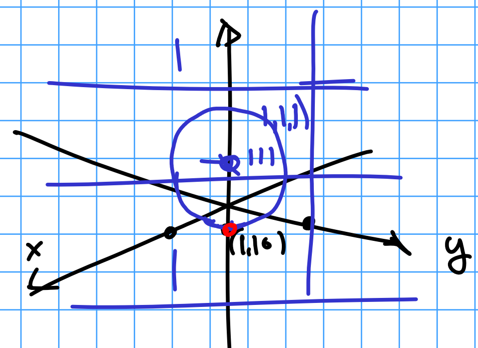
$2 \qquad 6$ ← MAX

minimo

$$f(x, z) = x^2 + (2-x)^2 + z^2$$

$$1 + 1 \quad \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

DUNQUE LA DISTANZA MINIMA $= \sqrt{2}$ e si realizza nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

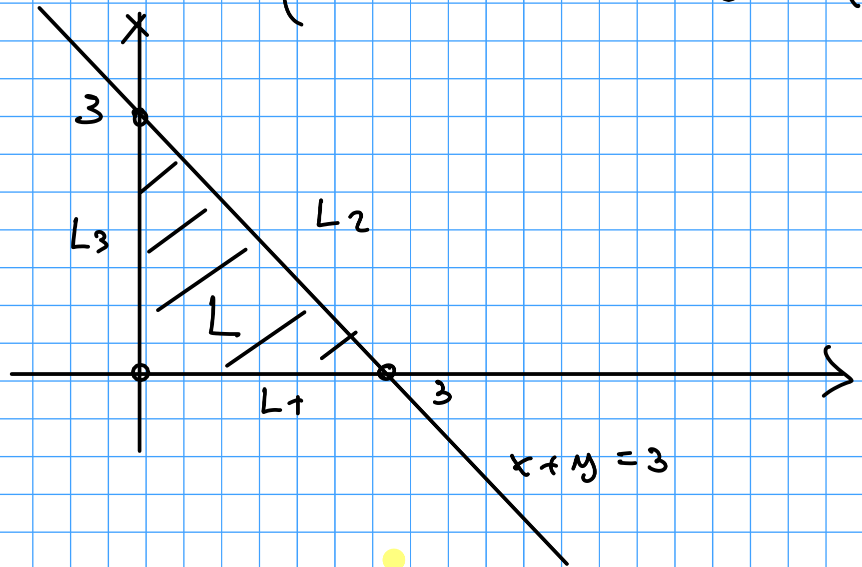


EX

$$f(x,y) = \left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)$$

su $L := \{ x+y \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \}$

L è un triangolo ottenuto intersecando tre semipiani $\left(\text{di vertici } \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \right)$



DEVO: (a) TROVARE I PUNTI STAZIONARI INTERNI a L

(b) TROVARE I PT STAZ. VINCOLATI A LATI "APERTI"

$L_1 := \{(x,y) : y=0 \quad 0<x<3\}$

$L_2 = \{(x,y) : x+y=3 \quad 0<x<3\}$

(OPPURE) $= \left\{ t\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+(1-t)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \text{ con } 0<t<1 \right\}$

$L_3 = \{ (x,y) : \ x=0 \quad 0<y<3 \}$

(c) CONSIDERARE I VERTICI DI L

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{y}{2}\right) \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$

$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} \notin L$

NON CI SONO PTI STAZ. INTERNI A L

(b) SU L_1 trovo le condizioni

$\nabla f = \begin{pmatrix}0\\ \lambda\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ cioè

$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right) = 0 \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right) = \lambda \end{cases}$$

← IMPOSSIBILE se $y=0$

SU L_3 TROVO

$$\begin{cases} x=0 \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right) = \lambda \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)=0 \end{cases}$$

← IMPOSSIBILE se $x=0$

SU L_3 TROVO

$$\begin{cases} x+y = 3 & 0 < x < 3 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

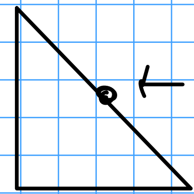
Perché $g(x,y) = x+y-3$ mi dà il vincolo e $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ \cancel{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right) = \cancel{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{y}{2}\right) \quad (=\lambda) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x=y \end{cases} \iff x = \frac{3}{2} = y$$



$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad (>3)$$

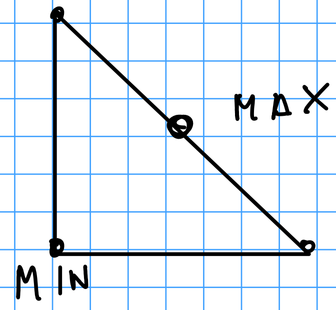
(c) I VERTICI SONO $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$f(V_1) = 1$$

$$f(V_2) = \left(1+\frac{3}{2}\right)(1+0) = \frac{5}{2} = f(V_3)$$

IL MAX è $\frac{49}{16}$

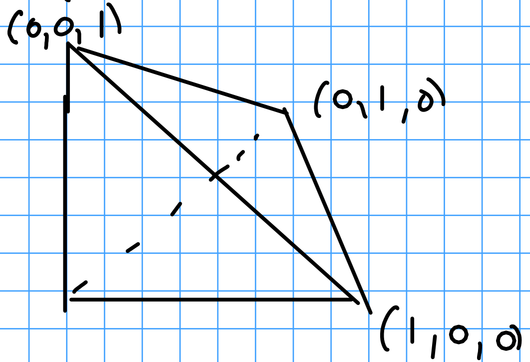
IL MIN è 1



EX

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$$

SU $M = \{ x+y+z \leq 1 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$



BISOGNA STUDIARE f SU

(a) LA PARTE INTERNA DI M

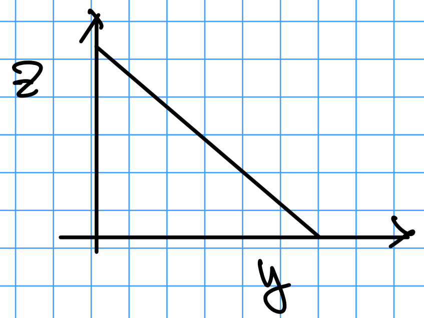
(b) LE QUATTRO "FACCE"

(c) I SEI "SPIGOLI"

(d) I QUATTRO "VERTICI"

(a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 6z \end{pmatrix}$ L'UNICO PTO CRITICO "LIBERO" È L'ORIGINE

(b) $F_1 = \{(x, y, z) : x = 0, \quad y + z < 1, \ y > 0, \ z > 0\}$



CONDIZIONE:

$$Df\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NELLA "PARTE INTERNA" DI F_1

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y + z < 1 \\ y > 0 \quad z > 0 \end{array}$$

RITROVO L'ORIGINE !! DI NUOVO — NON TROVO NULLA

Stesso discorso per

$F_2 = \{(x, y, z) : \ y = 0 \quad x + z < 1, \ x > 0, \ z > 0\}$

$F_3 = \{(x, y, z) : \ z = 0 \quad x + y < 1, \ x > 0, \ y > 0\}$

RIMANE $F_4 = \{ x + y + z = 1, \quad x > 0 \quad y > 0 \quad z > 0\}$

LA NORMALE A F_4 è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$2x = 2y = 6z = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = y = 3z = \frac{\lambda}{2}$$

$+$ condizione $\quad x+y+z=1$

$$3z + 3z + z = 1 \iff z = \frac{1}{7} \qquad x = y = \frac{3}{7} \qquad \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

PUNTO DA CONSIDERARE

$$f\left(\frac{3}{3}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right) = \frac{9}{49} + \frac{9}{49} + \frac{3}{49} = \frac{21}{49}$$

(c) SUGLI "SPIGOLI"

- I TRE SPIGOLI CHE PARTONO DA ZERO

$t^2 = f(t, 0, 0)$ MINIMO in $t=0$

$t^2 = f(0, t, 0)$ $\quad 0 \leq t \leq 1 \leftarrow$ MAX in $t=1$

$3t^2 = f(0, 0, t)$

- GLI SPIGOLI CORRISPONDENTI ALLA FACCIA F_4

$f(t, (1-t), 0)$ $\quad 0 \leq t \leq 1$

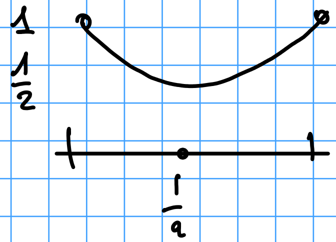
$f(t, 0, 1-t)$

$f(0, t, 1-t)$

IL PRIMO CASO MI DÀ $\varphi(t) = t^2 + (1-t)^2 \quad 2t^2 - 2t + 1$

CHE DEVO STUDIARE PER $t \in [0, 1]$

$\varphi'(t) = 4t - 2 = 0 \iff t = 1/2$ DI MINIMO



$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

IL MAX DI φ è nei pti $t = 0$, $t = 1 \Rightarrow \varphi(0) = 1 =$

<u>DUNQUE</u> SULLO SPIGOLO CHE CONGIUNGE $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

il max vale 1 e il min vale $\frac{1}{2}$

∘ NEGLI ALTRI DUE CASI TROVO

$$\varphi(t) = t^2 + 3(1-t)^2 = 4t^2 - 6t + 3$$

$$\varphi'(t) = 8t - 6, \quad \varphi'(t) = 0 \iff t = \frac{3}{4}$$

$$\varphi\left(\frac{3}{4}\right) = 4\,\frac{9}{16} - 6\cdot\frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{12}{4} = \frac{3}{4}$$

$\varphi(0) = 3 \qquad \varphi(1) = 4 - 6 + 3 = 1$

SU QUESTO SPIGOLO $\boxed{MAX = 3}$ $\boxed{MIN = \frac{3}{4}}$

ALLA FINE DI TUTTO:

- DI SICURO IL MINIMO DI f È IN $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  e VALE 0

- IL MAX è il max dei valori in tutti i punti TROVATI

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{21}{49} < 3 \left(= \text{valore nel vertice } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

DUNQUE IL MAX è 3, che si realizza nel vertice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si può vedere peraltro che il punto $\begin{pmatrix} 3/7 \\ 3/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ è

il punto di minimo per f ristretto al piano

$\{x+y+z=1\}$

In effetti, da conti fatti sopra risulta che $\begin{pmatrix} 3/7 \\ 3/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ è l'unico punto critico vincolato al piano

DI SICURO NON È DI MAX perché in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la f vale $3 > \frac{21}{49}$ (e in $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vale $1 > \frac{21}{49}$)

PER VEDERE CHE TIPO DI PUNTO È USO LA CONDIZIONE $x+y+z=1$ per ricavare z $\Rightarrow z = 1-x-y$ e studio

$$g(x,y) = f(x,y,1-x-y) \quad \text{su } \mathbb{R}^2$$

$$= x^2+y^2+3(1-x-y)^2$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 6(1-x-y) \\ 2y - 6(1-x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x+6y-6 \\ 6x+8y-6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x,y) = 0 \iff \begin{matrix} x = 3/7 \\ y = 3/7 \end{matrix}$$

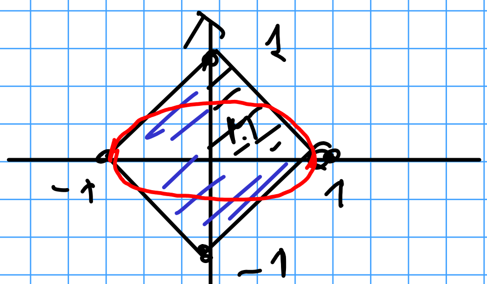
$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$\det = 64 - 36 > 0$ $\quad 8 > 0 \Rightarrow$ MINIMO

TROVARE MAX e MIN di f su M

$$f(x,y) = (1 - x^2 - 4y^2)^2 = g(x)^2$$

su $M = \{ |x| + |y| \leq 1 \}$ $\quad (g(x) = 1 - x^2 - 4y^2)$



Su $x \geq 0$ e $y \geq 0$ la condizione diventa $x + y \leq 1$

Per simmetria di tutto il "rombo"

$$\nabla f(x,y) = 2\left(1-x^2-4y^2\right)\begin{pmatrix}-2x\\-8y\end{pmatrix}$$

$\nabla f(x,y)=0 \iff 1-x^2-4y^2=0$

oppure $x=y=0$

DUNQUE TROVO L'ORIGINE $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ e

tutti i punti dell'ellisse $x^2+4y^2=1$

IN QUESTI PUNTI $f(x,y)=0 \Rightarrow$ sono tutti minimi

perché $f(x,y)\geq 0$ e vale zero in quei punti

IL MAX PUÒ ESSERE IN $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (dove f vale 1)

OPPURE SUI LATI "DEL ROMBO". DEVO TROVARE

$\nabla f(x,y)=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ su $x+y=1 \quad 0<x<1$

$g(x,y)\begin{pmatrix}2x\\8y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\end{pmatrix} \iff x=4y$ / oppure $g(x,y)=0$

oppure $\lambda=0=g(x,y)$

$4y+y=1 \quad y=1/5$

$$\binom{x}{y} = \binom{4/5}{1/5} \quad \dots \quad f\binom{4/5}{1/5} = \left(1 - \frac{16}{25} - \frac{4}{25}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{5}{25}\right)^2 = \frac{1}{25} < 1 = f(0,0)$$

DATO CHE TUTTO È SIMMETRICO ANCHE NEGLI ALTRI LATI IL MAX $< f(0,0)$

IN $(1,0)$ f vale 0

$(0,1)$ f vale $(1-4)^2 = 9 > f(0,0)$

IL MAX VALE 9 e si realizza nello "spigolo" $\binom{0}{1}$

(sul lato dovrebbe andare così: