Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 17, 6 novembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

ABBIAMO VISTO:

Se $G: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ differenziabile, $\mathcal{M} = \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) = 0 \}$

e se $\nabla G(x_0) \neq 0$ per un $x_0 \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$

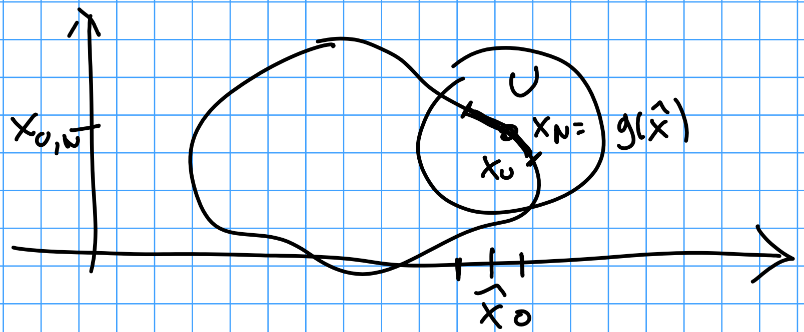
"vicino a x_0" $\mathcal{M}$ è una superficie parametrica.

PIÙ PRECISAMENTE se $\frac{\partial G(x_0)}{\partial x_N} \neq 0$ (potrebbe essere $\frac{\partial}{\partial x_i} G(x_0) \neq 0$)

SCRIVIAMO $x = (\hat{x}, x_N)$ con $\hat{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$ e $x_N \in \mathbb{R}$

allora $\exists$ U intorno di x_0 in $\mathbb{R}^N$ $\exists$ A intorno di $\hat{x}_0$ in $\mathbb{R}^{N-1}$ ed esiste $g: A \to \mathbb{R}^N$ differenziabile con

$g(\hat{x}_0) = x_{0,N}$, e $\mathcal{M} \cap U = \{ (\hat{x}, g(\hat{x})) : \hat{x} \in A \}$



(CONSEGUENZA $\Rightarrow$ posso parametrizzare $\mathcal{M}$ vicino a x_0 mediante

$\phi(\hat{x}) = (\hat{x}, g(\hat{x}))$ $\Rightarrow$ il piano tangente in un $x \in M \cap U$, se $x = (\hat{x}, g(x))$, è generato dai vettori

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ i}}{0 \dots 1} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ N-1}}{0}, \frac{\partial g}{\partial x_i}(\hat{x})\Big) = \otimes$$

PER QUANTO VISTO (NEL CASO $N = 2$, ma si fa in generale)

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\hat{x}) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x_i}(\hat{x}, g(\hat{x}))}{\frac{\partial G}{\partial x_N}(\hat{x}, g(\hat{x}))}$$

$$\otimes = \Big(0, \dots, 1, \dots 0, -\frac{\partial G}{\partial x_i}(\hat{x}, g(\hat{x})) \Big/ \frac{\partial G}{\partial x_N}(\hat{x}, g(\hat{x}))\Big)$$

$$= \Big(0, \dots, 1, \dots 0, -\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) \Big/ \frac{\partial G}{\partial x_N}(x)\Big)$$

se $x = (\hat{x}, x_N) \in M \cap U$

NOTA CHE DALL'ULTIMA FORMULA SI VEDE (COSA CHE SAPEVAMO) CHE $\nabla G(x) \perp$ PIANO TANGENTE : INFATTI

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}(x)}{\frac{\partial G}{\partial x_N}(x)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial x_N}(x) \end{pmatrix} = 1 \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i} + -\frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}}{\frac{\partial G}{\partial x_N}} \cdot \frac{\partial G}{\partial x_N} = 0$$

TEOREMA (Moltiplicatori di Lagrange)

$G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ differenziabile e $M := \{ G(x) = 0 \}$

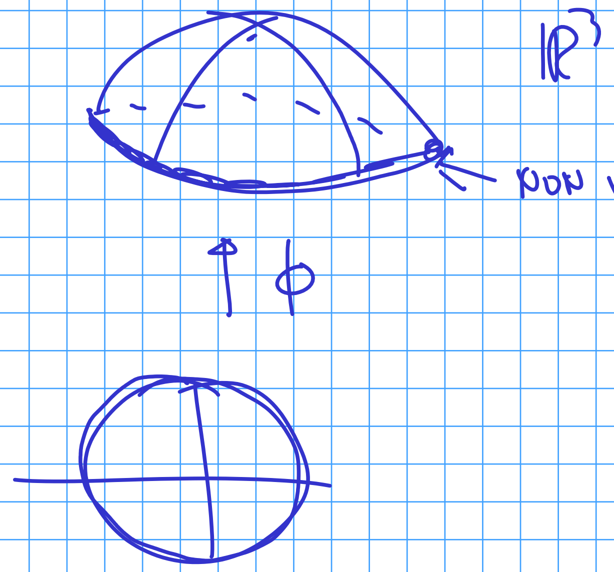
Supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$ dove A aperto con $M \subset A$, f differenziabile.

$x_0 \in M$ tale che

- x_0 di max (min) rel. per $f|_M$ ($f(x) \overset{(\geq)}{\leq} f(x_0)$ $\forall x \in M$ "x vicino a x_0"
- $\nabla G(x_0) \neq 0$

ALLORA $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$

NOTA: x_0 è "interno" (in un senso da precisare) a M



NON VANNO BENE CON 1 MO

ES.

$$f(x,y) = e^{xy}$$

$$M = \{(x,y) : x^2-1 \le y \le 3\}$$

TROVARE IL MAX e il MIN DI f su M

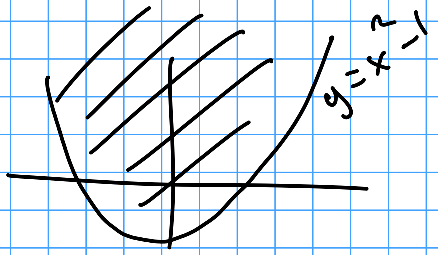
NOTA M è chiuso:

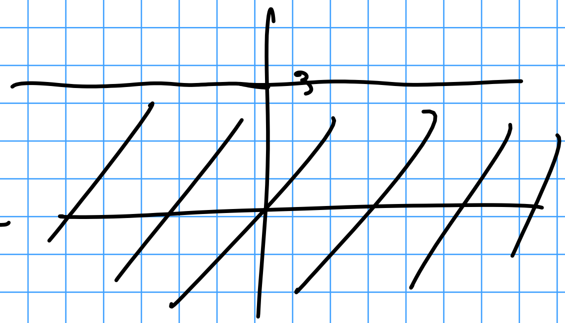
$M = M_1 \cap M_2$ dove

$$M_1 : \{(x,y) : x^2-1 \le y\} = \{ \overbrace{y-x^2+1}^{G_1(x,y)} \ge 0 \} = \underbrace{G_1^{-1}(\overset{\text{CHIUSO IN } \mathbb{R}}{[0,+\infty[})}_{\text{CHIUSO IN } \mathbb{R}^2 \text{ perché } G_1 \text{ è continua}}$$

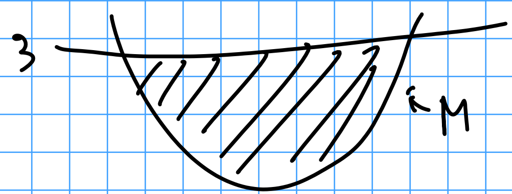
$$M_2 = \{(x,y) : y \le 3\}$$

FATTO Se G è continua $\Rightarrow$ $\{G(x) \leq 0\}$ e $\{G(x) = 0\}$ sono chiusi

$M_1 =$ 

$M_2 =$ 

M è anche limitato (SI VEDE DAI DISEGNI)



PER WEIERSTRASS $\exists$ x_1, x_2 in M tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad \forall x \in M.$$

Se x_1 (x_2) $\in \mathring{M}$ $\Rightarrow$ $\nabla f(x_1) = 0$ $(\nabla f(x_2) = 0)$

CERCHIAMO DUNQUE I PUNTI STAZIONARI DI f INTERNI A M

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy}\, y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{xy}\, x$

UNICO PTO STAZIONARIO È $(x,y) = (0,0)$

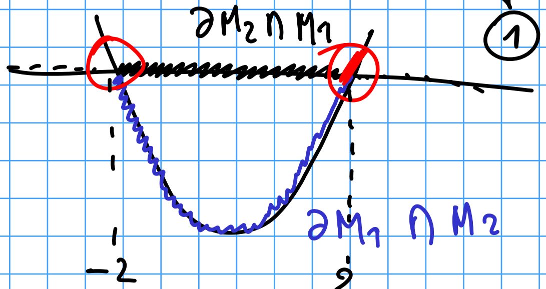
VEDIAMO CHE TIPO DI PUNTO È STUDIANDO $H_f(0,0)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} y^2 & e^{xy}(xy+1) \\ e^{xy}(xy+1) & e^{xy} x^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ $\det < 0 \Rightarrow$ **SELLA**

DOBBIAMO STUDIARE f SU ∂M

$$\partial M = \underbrace{\partial M_1 \cap M_2}_{①} \cup \underbrace{\partial M_2 \cap M_1}_{②}$$



$① = \{(x,y) : y = x^2 - 1,\ y \leq 3\} = \{ y = x^2 - 1 \quad -2 \leq x \leq 2 \}$

$② = \{(x,y) : y = 3, \ y \geq x^2 - 1\} = \{ y = 3 \ \ -2 \leq x \leq 2 \}$

SE APPLICHIAMO IL TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI AL PEZZO ① OTTENIAMO

$(x_0, y_0) \in ①$ ma $-2 < x_0 < 2$ e x_0 è max/min sol per f su ① $\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla G_1(x_0, y_0)$

dove $G_1(x,y) = y - x^2 + 1$, per $\lambda \in \mathbb{R}$ opportuno

DUNQUE se sono nel pezzo ① +lo la condizione

$$\underbrace{e^{xy} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}}_{\nabla f(x,y)} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}}_{\nabla G_1(x,y)} \iff \begin{cases} y e^{xy} = -2\lambda x \\ x e^{xy} = \lambda \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

TEOR. SUI MOLTIPLICAT.

CONDIZIONE $(x,y) \in ①$

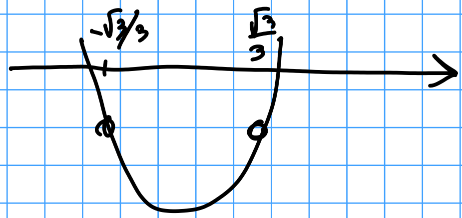
$$\Rightarrow e^{xy} = \frac{-2x\lambda}{y} = \frac{\lambda}{x} \iff \underbrace{\lambda = 0}_{\substack{\text{punti staz.} \\ \text{liberi (NON CE NESSUNO)}}} \text{ oppure } \boxed{y = -2x^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2x^2 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 3x^2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{1/3}$$

SONO TRA -2 e 2 $\Rightarrow$ SONO AMMISSIBILI

"DUE PUNTI STAZIONARI VINCOLATI" SUL PEZZO 1

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{3}/3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

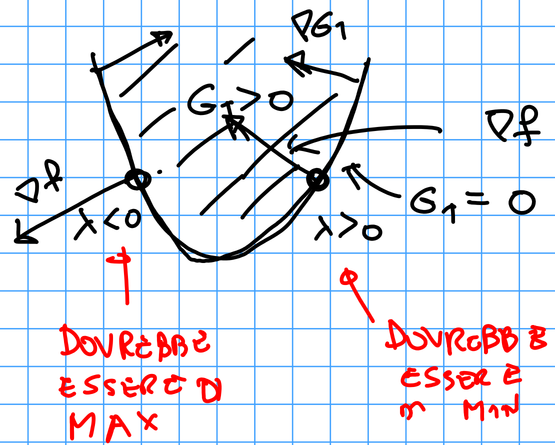


$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = e^{\mp\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

$$G_1(x,y) = y - x^2 + 1$$

CALCOLIAMOCI ANCHE λ (per curiosità ...)

$$\lambda = e^{xy}\, x \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\, e^{\mp\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$



PASSIAMO A STUDIARE f SU ②

IN QUESTO CASO $\quad e^{xy}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

\+ condizione di vincolo $y=3$

(MI SERVONO I PUNTI CON $-2 < x < 2$)

$$y = 0$$
$$e^{xy}x = \lambda \qquad \text{IMPOSSIBILE}$$
$$y = 3$$

NON CI SONO PUNTI BUONI

I PUNTI $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$f(-2, 3) = e^{-6}$

$f(2, 3) = e^{6}$

$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = e^{\mp\frac{2\sqrt{3}}{9}}$

e^{-6} è il minimo

e^{6} è il max

$e^{6} >$

$e^{-6} <$

(pto di min $= (-2, 3)$)

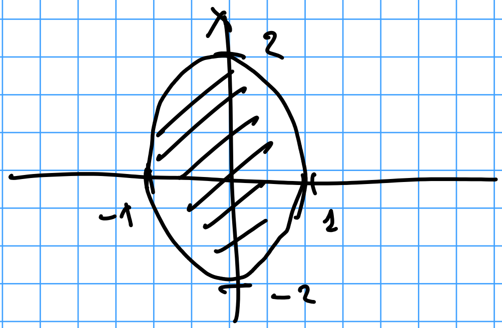
(pto di max $= (2, 3)$)

EX.

Cerco i max / min di

$$f(x,y) = x + 2y$$

su $M = \{ x^2 + 4y^2 \leq 1 \}$

$M =$ 

$$M = \{ \underbrace{x^2 + 4y^2 - 1}_{G(x,y)} \leq 0 \}$$

$$\partial M = \{ (x,y) : G(x,y) = 0 \}$$

$$\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$$

- $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- NON CI SONO PTI STAZIONARI "LIBERI" per f

$\Rightarrow$ i pti di max/min per f sono su ∂M

- cerco i "punti stazionari vincolati" su ∂M cioè quelli

per cui esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x \\ 2 = \lambda 8y \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 4\lambda x = 8\lambda y \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \quad (\text{pti staz. liberi } \nexists \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

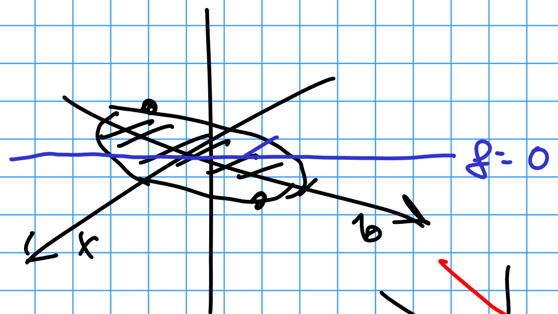
$$y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

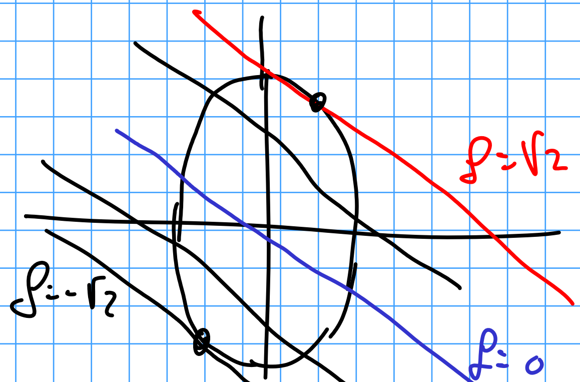
quello con + è di max $(= \sqrt{2})$

quello con - è di min

$x + 2y = 0$

$y = -\frac{x}{2}$





LINEE DI LIVELLO