Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 16, 4 novembre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

RICAPITOLANDO:

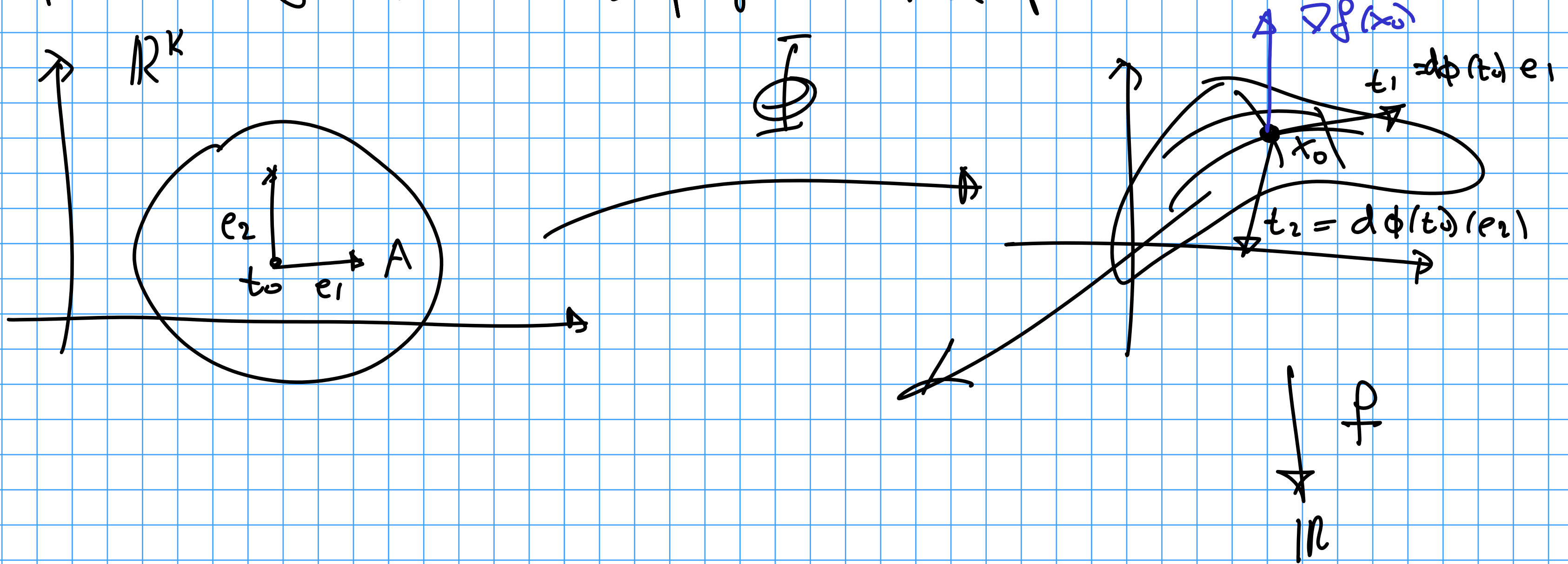
Se $\phi : A \to \mathbb{R}^M$ A aperto di $\mathbb{R}^K$ individua una superficie parametrica (k-dimensionale) in $\mathbb{R}^M$ e

se $f : U \to \mathbb{R}$ U aperto con $\phi(A) \subset U$

(f è definita in un aperto che contiene il sostegno di ϕ)

f differenziabile in U ALLORA

Se X è un punto di max/min relativo per f ristretto a $\phi(A)$ $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0)$ è ortogonale al piano tangente alla superficie nel punto x_0



Def. Data una superficie $\phi : A \to \mathbb{R}^M$ k dimensionale in $\mathbb{R}^M$
e f differenziabile definita in un aperto $U \supset \phi(A)$ CHIAMO
gradiente di f ristretto alla superficie, la
PROIEZIONE DI $\nabla f(x_0)$ sul piano tangente a ϕ
in x_0. LO INDICO CON $\nabla_\phi f(x_0)$

CON QUESTA DEFINIZIONE

x_0 pto di max/min relativo per f su $\phi(A)$ $\Rightarrow$ $\nabla_\phi f(x_0) = 0$

DARE UNA SUPERFICIE MEDIANTE UN "LUOGO DI ZERI"

TEOREMA

SUPPONIAMO CHE $G : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$. Pongo

$$\mathcal{M} = \{ x \in \mathbb{R}^M : G(x) = 0 \}$$

Supponiamo $x_0 \in \mathcal{M}$, esista U intorno di x_0:

G differenziabile in tutte le x di U e $\nabla f(x) \neq 0$

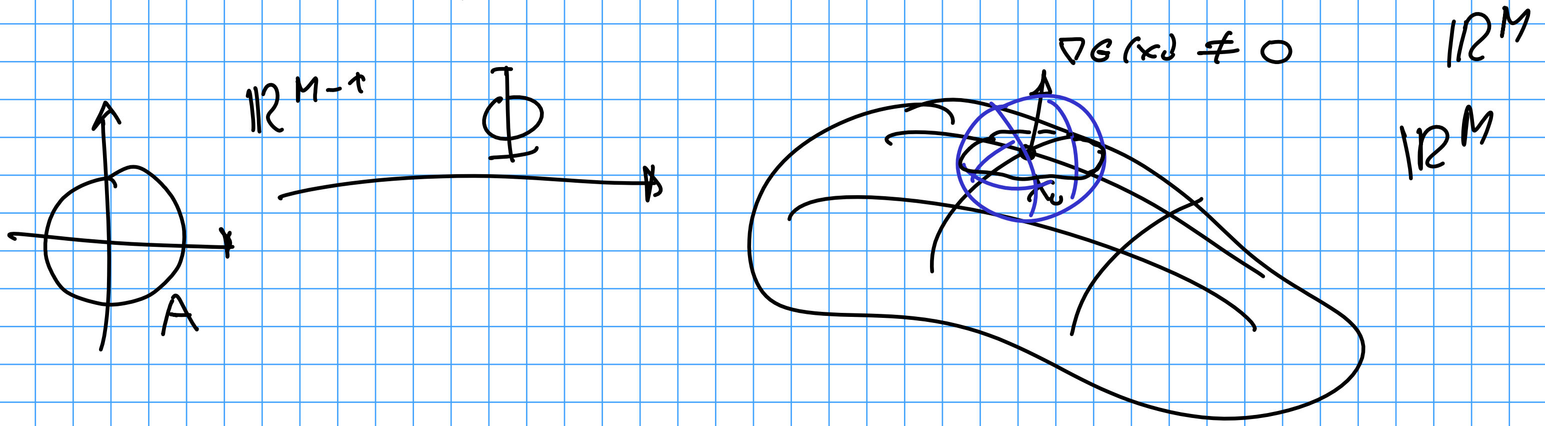
per tutte le x di U

Allora esiste $A \subset \mathbb{R}^{M-1}$ aperto contenente 0,

esiste $\phi : A \to \mathbb{R}^M$ tale che ϕ è differenziabile

e $d\phi(x)$ è iniettivo $\forall\, x \in A$ e

$$\phi(A) = \mathcal{M} \cap U$$



$\simeq$ VICINO A x_0 $\mathcal{M}$ è un pezzo di superficie parametrica $M-1$ dimensionale

INOLTRE $\forall x \in U \cap \mathcal{M}$ $\{\lambda \nabla G(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$ è la retta normale a $\mathcal{M}$ in x

NE SEGUE CHE, se $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ è definita in un intorno di

x_0, se f è differenziabile $\Rightarrow$

$$\nabla_{\mathcal{M}} f(x_0) = \nabla f(x_0) - \underbrace{\left(\nabla f(x_0) \cdot \frac{\nabla G(x_0)}{|\nabla G(x_0)|} \right) \frac{\nabla G(x_0)}{|\nabla G(x_0)|}}_{\text{COMPONENTE DI } \nabla f(x_0) \text{ lungo la direzione di } \nabla G(x_0)}$$

versore

QUANTO SCRITTO SOPRA SI PUÒ ULTERIORMENTE PRECISARE:

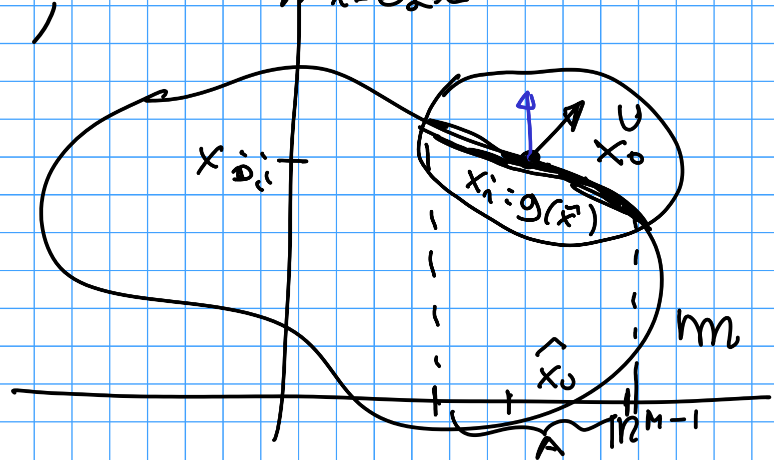
TEOREMA 2 Se $G : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ differenziabile,

$\mathcal{M} = \{ X : G(X) = 0 \}$, $X_0 \in \mathcal{M}$ e

$\nabla f(x_0)$ ha la componente i-esima non nulla

in un intorno U di X_0, (cioè i-esima

$\frac{\partial G}{\partial x_i} \neq 0$ in un intorno di x_0)



ALLORA ESISTE UN INTORNO

A di $(x_{0,1} \dots 0 \dots x_{0,M}) = \hat{x}_0$
$\in \mathbb{R}^{M-1}$ posto i

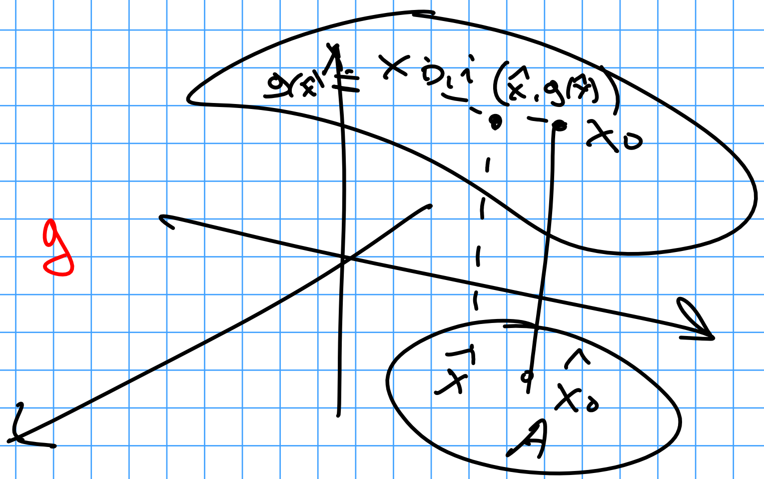
e $g : A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che

$g(\hat{x}_i) = x_{0,i}$ $\qquad g(A) = M \cap U$

NOTA CHE TEOREMA 2 $\Rightarrow$ TEOREMA 1 ; IMMAGINO CHE $i = M$

BASTA DEFINIRE $\phi(\hat{x}) = (\hat{x}, g(\hat{x}))$

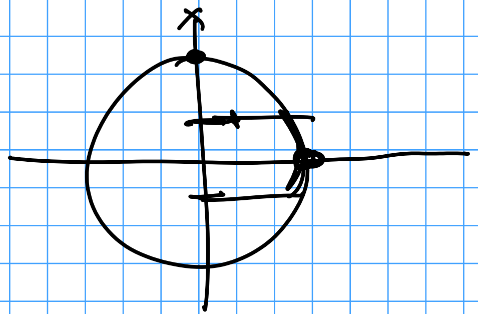
VICINO A x_0 M è un grafico : il grafico di g



ESEMPIO $\quad G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$M = \{x^2 + y^2 = 1\}$

$\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ $\qquad$ & $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



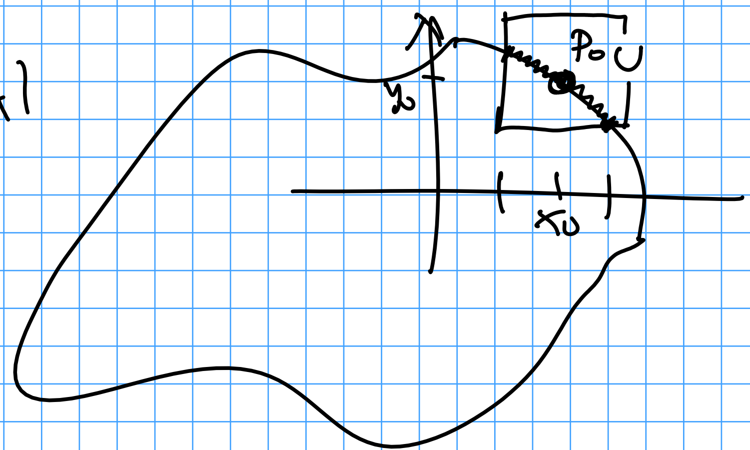
$\Rightarrow$ vicino a x_0 la M è
il grafico di una funzione
$x = g(y)$

DIM. (NEL CASO $M = 2$) Prendo $G(x,y)$, C^1
da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $M = \{G(x,y) = 0\}$.
So che $P_0 = (x_0, y_0)$ è tale che $\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0) > 0$
(per esempio):

VOGLIO TROVARE UNA $g(x)$ definita in intorno
A di x_0 tale che

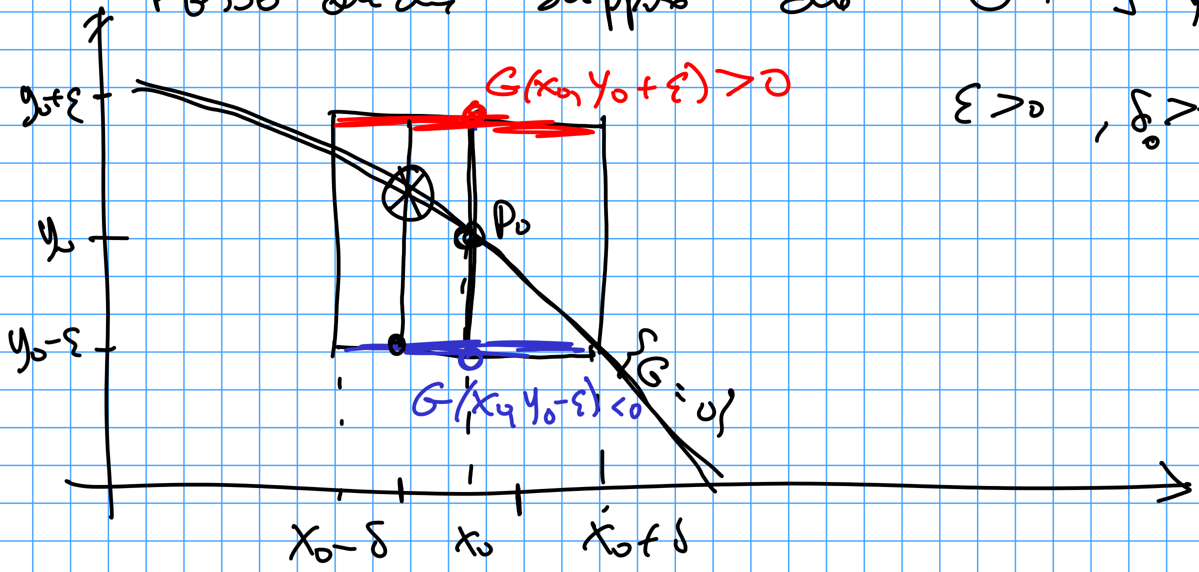
$M \cap U = \{(x, g(x)) \quad x \in A\}$

(dove U è un intorno di P_0)



(I) Posso supporre $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \in U$ per un opportuno intorno U di P_0 (perché $\frac{\partial}{\partial y} G$ è continua)

Posso anche supporre che $U =]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[\times]x_0-\delta, x_0+\delta[$



$\varepsilon > 0$, $\delta_0 > 0$

(II) Mi metto in $x = x_0$ e guardo $\psi_{x_0}(y) = G(x_0, y)$

Dato che $\psi_{x_0}' = \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y) > 0 \Rightarrow$

$$\psi_{x_0}(y_0+\varepsilon) > 0 > \psi_{x_0}(y_0-\varepsilon)$$

(III) Se prendo x VICINO A x_0, cioè

$x_0-\delta < x < x_0+\delta$ con δ piccolo ($\leq \delta_0$)

TROVO

$$G(x, y_0+\varepsilon) > 0$$
$$G(x, y_0-\varepsilon) < 0 \qquad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

(IV) Se $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\Rightarrow$

$y \to G(x,y)$ è strettamente crescente e

$G(x, y_0+\varepsilon)>0$, $G(x, y_0-\varepsilon_0)<0$

$\Rightarrow$ esiste UNO E UNO SOLO $y \in]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[$

tale che $G(x,y)=0$

IN QUESTO MODO HO DEFINITO UNA $y=g(x)$

per $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ tale che $(x, g(x)) \in M$

$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ e inoltre se $(x,y) \in M \cap U$

$\Rightarrow y = g(x)$

DEVO DIM. CHE g è continua e differenziabile

CON UN PO' DI PAZIENZA (IMITANDO LA TECNICA VISTA ORA) SI DIMOSTRA CHE g è CONTINUA.

(NOTA: $g(x_0)=y_0$)

PER DIMOSTRARE CHE g è derivabile:

Dalla differenziabilità di G: $\left(P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$$G(x,y) = G(x_0,y_0) + \frac{\partial G}{\partial x}(x',y')(x-y)$$
$$+ \frac{\partial G}{\partial y}(x',y')$$

CON (x',y') SUL SEGMENTO TRA (x_0,y_0) e (x,y)

Mettiamo $y = g(x) \Rightarrow$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{G(x, g(x))} = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{G(x_0, y_0)} + \frac{\partial G}{\partial x}(x',y')(x-x_0)$$
$$+ \underbrace{\frac{\partial G}{\partial y}(x',y')}_{\neq 0}(g(x)-g(x_0)) +$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}(x',y')}{\frac{\partial G}{\partial y}(x',y')}$$

dove (x',y') è un punto del segmento tra (x_0,y_0) e $(x, g(x))$

Se $x \to x_0 \Rightarrow g(x) \to g(x_0)$ (ABBIAMO DETTO CHE g è continua)

$(x',y') \to (x_0, y_0)$ NE SEGUE

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} G(x_0,y_0)}{\frac{\partial}{\partial y} G(x_0,y_0)}$$

CON LO STESSO SISTEMA SI DIMOSTRA LA STESSA FORMULA IN x VICINO A x_0

DOMANI NON C'È LEZIONE

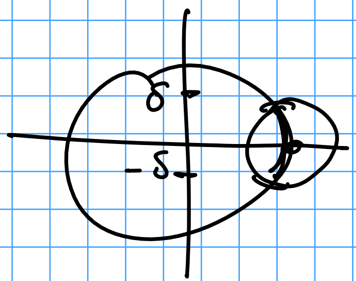
NELL'ESEMPIO DI PRIMA

$$G(x,y) = x^2+y^2-1$$

M = circonferenza di raggio 1

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} G(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

PER IL TEOREMA: $\exists\ U$ intorno di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\exists\ \delta > 0$ ed $\exists\ g :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$

tale che $M \cap U = \{(g(y),y) : y \in]-\delta,\delta[\}$

(È chiaro da $g(y) = \sqrt{1-y^2}$) $\left(\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \right)$

Dal teorema si deduce che g è C^1 e

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y} G(1,0)}{\frac{\partial}{\partial x} G(1,0)} = 0$$

In effetti $\frac{d}{dy}\sqrt{1-y^2} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$ che fa 0 se $y=0$

La formula vale anche se $x \neq 0 \Rightarrow$

$x \simeq 0$ $$g'(x) = -\frac{2y}{2x}\Big|_{x=g(y)} =$$

$$-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$