Analisi Matematica II

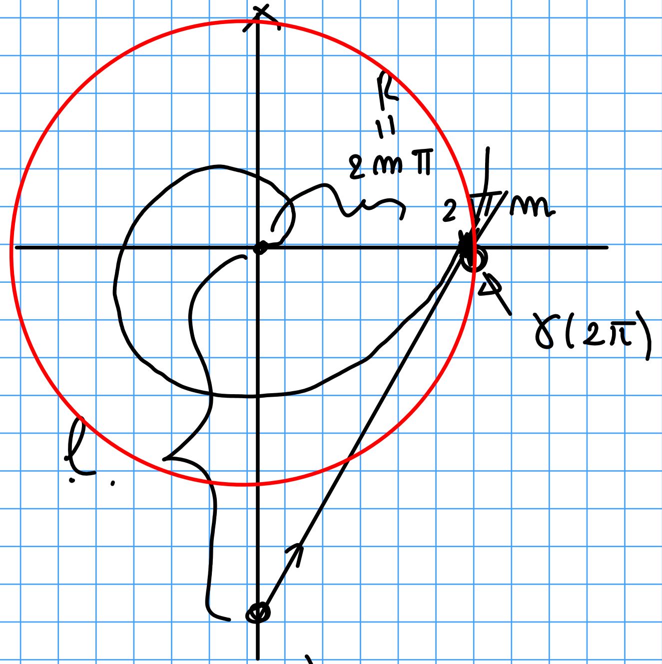
prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 15, 30 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

UNA CURIOSITÀ RIGUARDO LA SPIRALE

$$\rho = m\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \end{pmatrix} = \boxed{m\begin{pmatrix} \theta\cos\theta \\ \theta\sin\theta \end{pmatrix}}$$



$$\gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 2\pi m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot\gamma(\theta) = m\begin{pmatrix} \cos(\theta) - \theta\sin(\theta) \\ \sin(\theta) + \theta\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\dot\gamma(2\pi) = m\begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

$$\ell : 2m\pi = 2\pi : 1$$

$$\Rightarrow \ell = \underbrace{(2m\pi)}_{R} \cdot 2\pi$$

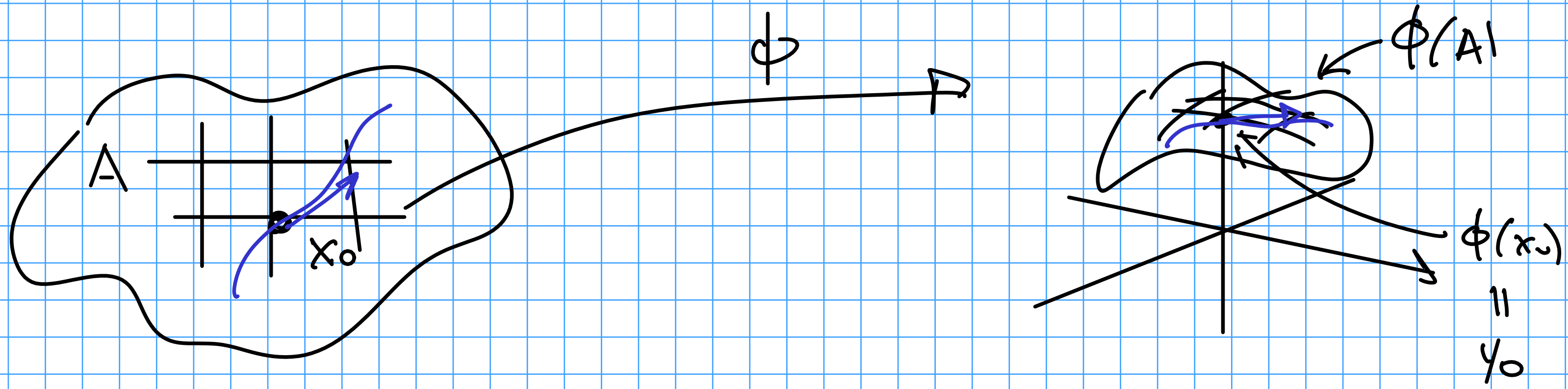
DUNQUE

ℓ = lunghezza della circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ passante per $\gamma(2\pi)$

IMITANDO LA DEF. DI CURVA POSSO DARE LA NOZIONE DI "SUPERFICIE PARAMETRICA"

CASO DI SUPERFICI BIDIMENSIONALI IN $\mathbb{R}^3$

PRENDO UN APERTO $A \subset \mathbb{R}^2$ e $\phi : A \to \mathbb{R}$



SUPPONIAMO ϕ DIFFERENZIABILE. FISSIAMO $x_0 \in A$

Prendiamo una curva $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$ $\gamma(0) = x_0$

γ regolare; in particolare $\gamma'(0)$ esiste ed è diverso da 0.

Se $\gamma_1 = \phi \circ \gamma$ γ_1 è una curva in $\mathbb{R}^3$ il cui sostegno è contenuto in $\phi(A)$! ; $\gamma_1(0) = \phi(x_0) = y_0$

$$\dot{\gamma}_1(0) = d\phi(y_0)\,\dot{\gamma}(0)$$

SE $df(x_0)$ è iniettivo IN TUTTI GLI $x_0 \in A$

DICO CHE ϕ è una superficie regolare parametrica di sostegno $\phi(A)$: QUESTO EQUIVALE A DIRE

che la matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \end{pmatrix}$$ HA RANGO 2

$$\Updownarrow$$

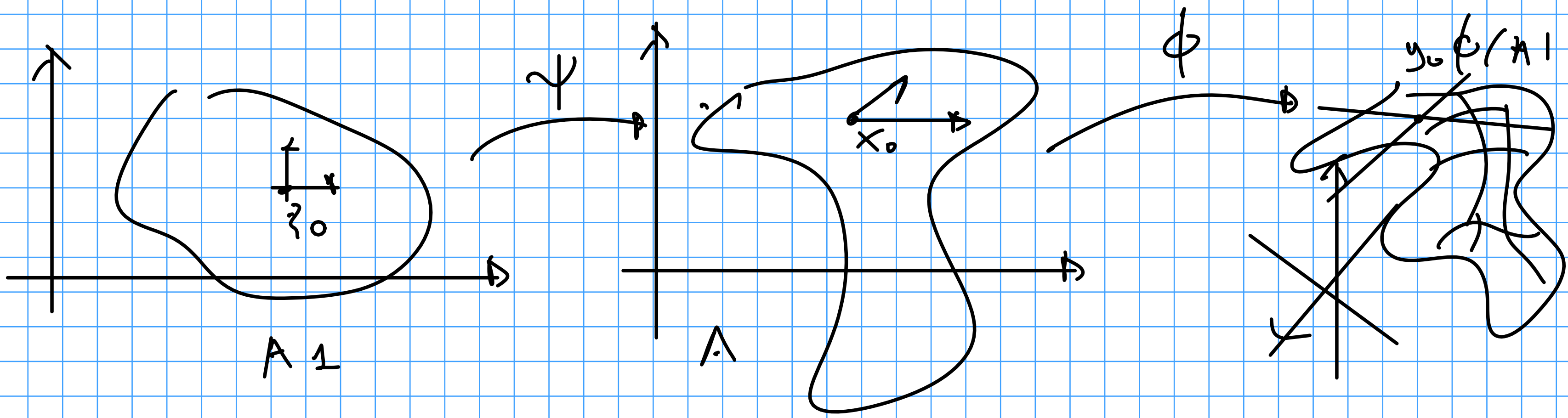
$\frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ $(\in \mathbb{R}^3)$ sono lin. indipendenti

SI CHIAMA PIANO TANGENTE IN $P_0 = (x_0, y_0)$ il sottospazio bidimensionale generato da $\frac{\partial \phi}{\partial x}(P_0)$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y}(P_0)$

SI POTREBBE DIM. CHE IL PIANO TANGENTE RIMANE LO SE "RIPARAMETRIZZO" ϕ CIOÈ:

Se prendo un aperto $A_1 \subset \mathbb{R}$ tale che esiste
$\psi : A_1 \to A$ biunivoca con $\det |d\psi(x)| \neq 0$

Allora posto $\phi_1 = \phi \circ \psi$ è una superficie con lo stesso sostegno di ϕ
Dato $x_0 \in A$ e $\xi_0 \in A_1$ tale che $\psi(\xi_0) = x_0$



$\Downarrow$

IL PIANO TANGENTE A ϕ_1 in $\underset{\overset{\parallel}{y_0}}{\phi_1(\xi_0)}$ COINCIDE
COL PIANO TANGENTE A ϕ in $\underset{\overset{\parallel}{y_0}}{\phi(x_0)}$

TUTTO QUESTO SI PUÒ GENERALIZZARA A
DIMENSIONI ARBITRARIE:

Def. Sia $K < M$. Sia $A \subset \mathbb{R}^K$ UN APERTO e $\phi: A \to \mathbb{R}^N$ tale che ϕ è differenziabile e $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_K}(x)$ sono linearmente indipendenti (in particolare sono $\neq 0$) $\forall x \in A$.

DICO CHE ϕ è una ipersuperficie K-dimensionale in $\mathbb{R}^M$ e chiamo $\phi(A)$ il SOSTEGNO DI ϕ.

INOLTRE CHIAMO PIANO TANGENTE IN x_0 (O ANCHE IN $\phi(x_0)$) il sottospazio K-dimensionale generato da $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_0) \dots \frac{\partial \phi}{\partial x_K}(x_0)$

lo posso fare perché il piano tangente non cambia se riparametrizzo

IL PIANO TANGENTE SE ESISTE dipende "solo" dal sostegno.

LO SPAZIO ORTOGONALE AL PIANO TANGENTE SI DICE SPAZIO NORMALE A ϕ in x_0 (o in $\phi(x_0)$)

SE $k = M-1$ è UNIDIMENSIONALE

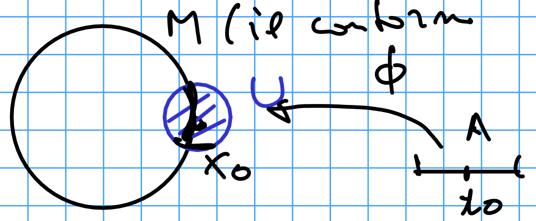
Se la superficie è parametrica (cioè è fatta mediante una ϕ come detto) si può scegliere per ogni punto $x \in A$ ($\forall y \in \phi(A)$) un vettore normale unitario $\vec{\nu}(x)$, continuo rispetto a x.

SUPPONIAMO DI AVERE UNA $G: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ e poniamo

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^M : G(x) = 0 \}$$

Prendiamo un punto $x_0 \in M$ e supponiamo:

(a) VICINO A x_0 M è UNA SUPERFICIE PARAM: DI DIM. $M-1$, cioè $\exists$ UN APERTO IN $\mathbb{R}^{M-1}$ A e UNA $\phi: A \to \mathbb{R}^M$, $\exists$ U intorno di x_0 tale che $\phi(A) = M \cap U$



NOTA: $M = \partial\{G(x) \le 0\}$
$= \partial\{G(x) \ge 0\}$

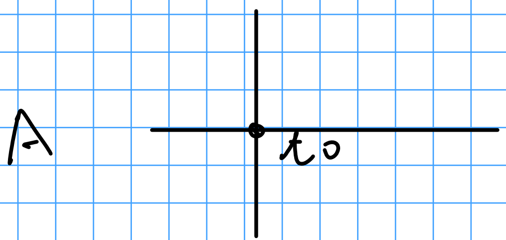
ALLORA $\nabla G(x_0)$ è ortogonale al piano tangente a M in x_0 (fatto utilizzando ϕ)
Se $\nabla G(x) \neq 0$ lo posso normalizzare

$$\vec{\nu}(x) = \frac{\nabla G(x)}{\|\nabla G(x)\|}$$ ← CAMPO DI VERSORI NORMALI

ϕ

$\phi : A \to M$

DIM. Prendiamo $A \subset \mathbb{R}^{N-1}$ aperto e prendiamo
$t_0 \in A$ tale che $\phi(t_0) = x_0$
Per ogni versore $\hat{e}_1 \dots \hat{e}_{N-1}$ in $\mathbb{R}^{N-1}$



posso considerare
$\gamma_i(s) = \phi(t_0 + s\hat{e}_i)$ $\quad -\varepsilon < s < \varepsilon$
per ε piccolo

SI VEDE CHE $\dot{\gamma}_i(0) = \phi'(x_0)(\hat{e}_i) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_0)$

se i varia da 1 a ... $M-1$ $\dot{\gamma}_i(0)$ genera il piano tangente. Dato che $\gamma_i(s) \in M \Rightarrow$

$$G(\gamma_i(s)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} G(\gamma(s))\Big|_{s=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla G(x_0) \cdot \dot{\gamma}_i(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla G(x_0) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$$

HO DIMOSTRATO CHE $\nabla G(x_0)$ è ortogonale a tutti i vettori $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_0)$ (che generano il piano tangente).

SUPPONIAMO ORA CHE ci sia una $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ e che x_0 sia di max / min relativo per f. $\Longrightarrow$

t_0 è di max / min relativo per

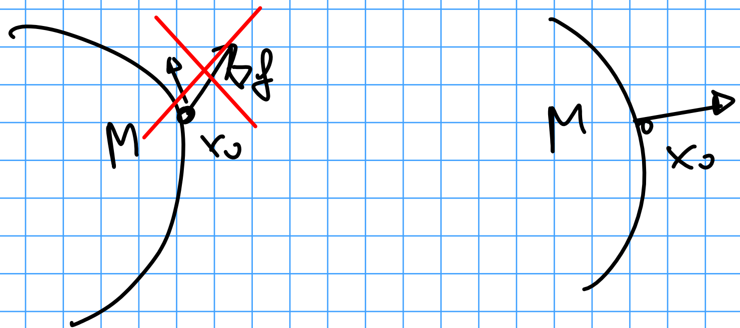
$$f_1 = f \circ \phi : A \to \mathbb{R}.$$

IN PARTICOLARE $f(\gamma_i(s))$ ha max / min nel in $s=0 \Rightarrow \frac{d}{ds} f(\gamma_i(s))\Big|_{s=0} = 0$

$\Longleftrightarrow \quad \nabla f(x_0) \cdot \dot{\gamma}_i(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow$ GENERANO IL PIANO TANGENTE

$\nabla f(x_0) \perp \dot{\gamma}_i(0)$ e $\dot{\gamma}_i(0) = \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x_i}$

DUNQUE $\nabla f(x_0) \perp$ PIANO TANGENTE



SE M è una superficie parametrica "$\nabla f_M(x_0)$

POTREMMO DEFINIRE "GRADIENTE VINCOLATO" DI

f su M IN UN $x_0 \in M$ come la PROIEZIONE DI $\nabla f(x_0)$

SUL PIANO TANGENTE A x_0

POSSIAMO DIRE CHE x_0 È STAZIONARIO

PER f vincolata a M se $\nabla f_M(x_0) = 0$

CIOÈ SE $\nabla f(x_0)$ è $\perp$ PIANO TANGENTE

Se so anche che $M = \{G(x) = 0\}$

con $G: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (dimensione di $M = N-1$)

$\nabla G(x_0)$, se diverso da zero, è ortogonale anche lui a piano tangente a M.

$\Longrightarrow$ $\nabla f(x_0)$ e $\nabla G(x_0)$ SONO PARALLELI

CIOÈ $\exists\, \lambda$: $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$

ESEMPIO $f(x,y) = 3x + 2y$

$$M = \{ \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{G(x,y)} = 0 \}$$

ALLORA $\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\nabla G(x,y) = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

DUNQUE i PTI STAZIONARI VINCOLATI SU M

sono i punti $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tali che $\exists\, \lambda$ per cui

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3}{2}\lambda \\ y &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\,\mathrm{pt.}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$