Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 14, 29 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

$\gamma(t) = (t^2, t^3) \qquad -1 \leq t \leq 1$

<u>DOMANDA</u>: γ è regolare ?? NO – ANCHE SE γ è C^1

INFATTI $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ $\qquad \gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

γ NON È REGOLARE

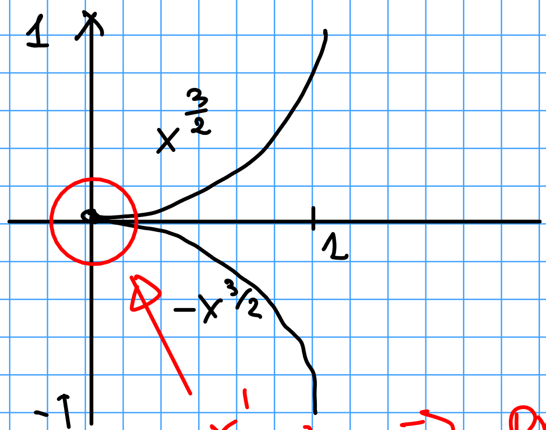
VEDIAMO COME È FATTO IL SOSTEGNO:

Se $t \in [0,1]$ $\qquad x = t^2 \Rightarrow y = t^3 = x^{\frac{3}{2}}$

$0 \leq x \leq 1$

Se $t \in [-1, 0]$ $\qquad x = t^2 \Rightarrow y = -(t^2)^{3/2} = -x^{\frac{3}{2}}$

$0 \leq x \leq 1$ $\qquad$ perché $t < 0$



$\gamma' = 0 \Rightarrow$ PROBLEMI

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

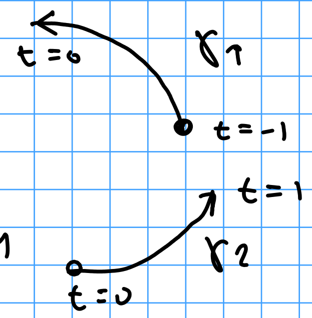
dove γ_1 = restrizione su $[-1, 0]$

γ_2 = restrizione su $[0, 1]$

γ_1 e γ_2 si possono riparametrizzare in modo da diventare regolari

$\tilde{\gamma}_1(t) = \left((t+1), -(t+1)^{3/2}\right)$ se $-1 \le t \le 0$

$\tilde{\gamma}_2(t) = \left(t, t^{3/2}\right)$ se $0 \le t \le 1$



OSS. $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^M$ $\quad \gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^M$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ POSSO DEFINIRE $\gamma_1 \cup \gamma_2$

anche se $c \neq b$ A MENO RIPARAMETRIZZARE

(per esempio) γ_2 su $[b, d+b-c]$ mediante il cambio di parametro $\varphi(t) = t + b - c$

$\varphi : [c,d] \to [b, d+b-c]$

SUPPONIAMO γ regolare (su $[a,b]$) di classe C^2

(ammette derivata II^a continua)

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

($\vec{T}(t)$ è un vettore di modulo 1)

VERSORE TANGENTE

$$\|\vec{T}(t)\|^2 = 1 \implies \frac{d}{dt}\|\vec{T}(t)\|^2 = 0$$

$$\vec{T}'(t) \cdot \vec{T}(t) \qquad \text{" } \qquad 2\vec{T}'(t) \cdot \vec{T}(t)$$

DUNQUE $\vec{T}'(t)$ è sempre ortogonale a $\vec{T}(t)$

LO CHIAMO $\vec{N}(t)$ ← NORMALE A $\gamma(t)$

Se calcoliamo $\vec{N}(t)$ TROVIAMO

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} = \frac{\ddot\gamma(t)\|\dot\gamma(t)\| - \dot\gamma(t)\frac{d}{dt}\|\dot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^2} = \circledast$$

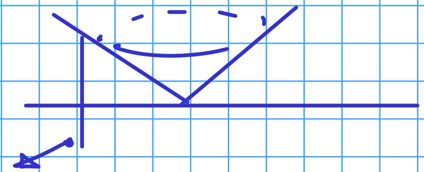
$$\frac{d}{dt}\|\dot\gamma(t)\| = \frac{d}{dt}G(\dot\gamma(t)) \qquad \text{dove} \qquad G(x) = \|x\|$$

$$\text{"} \quad \nabla G(\dot\gamma(t)) \cdot \ddot\gamma(t) = \frac{\dot\gamma \cdot \ddot\gamma}{\|\dot\gamma\|}$$

$$\nabla G(x) = \nabla\sqrt{\|x\|^2} = \frac{\nabla\|x\|^2}{2\sqrt{\|x\|^2}} = \frac{2x}{2\|x\|} \;\text{"}\; \frac{x}{\|x\|}$$

$$\left(\text{perché} \quad \nabla\|x\|^2_i = \partial x_i^2 = 2x_i\right)$$

DUNQUE $\nabla \|x\| = \dfrac{x}{\|x\|}$

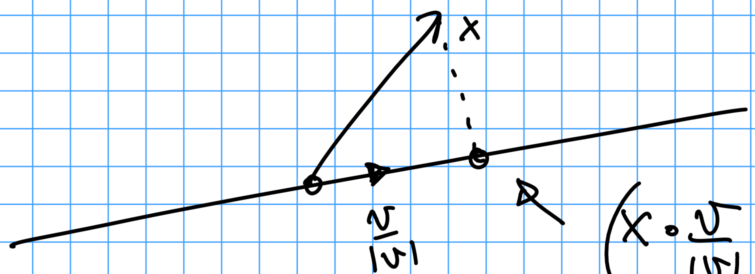


$$(*) = \frac{\ddot\gamma(t)\,\|\dot\gamma(t)\| - \dot\gamma(t)\,\dfrac{\dot\gamma(t)\cdot\ddot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}}{\|\dot\gamma\|^2} =$$

$$\frac{\ddot\gamma(t) - \dfrac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\,\dfrac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\cdot\ddot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} =$$

$$\frac{P_{\dot\gamma(t)}\,\ddot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}$$ dove $P_v(x) = x - \left(x\cdot\dfrac{v}{\|x\|}\right)\dfrac{v}{\|v\|}$

$= x$ − componente di x lungo la direzione di v



$\left(x\cdot\dfrac{v}{|v|}\right)\dfrac{v}{|v|}$

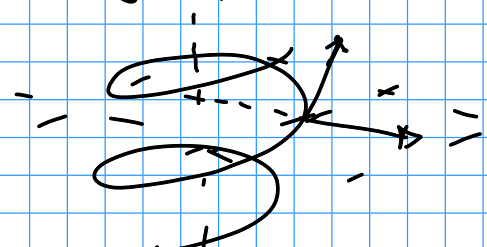
- DUNQUE LA DIREZIONE NORMALE $=$ DIREZIONE DELLA COMPONENTE DI $\ddot{\gamma}$ ORTOGONALE A $\dot{\gamma}$

- IL PIANO INDIVIDUATO DA $\ddot{\gamma}(t)$ e $\dot{\gamma}(t)$ È IL PIANO IN CUI "GIACE LA CURVA" ALL'ISTANTE t

PER ESEMPIO NEL CASO DELL'ELICA:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{2}$$



$$\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{DIREZIONE NORMALE}$$