# Analisi Matematica II

prof. Claudio Saccon (*)

Lezione 13, 28 ottobre 2013

(*) Dipartimento di Matematica
email: saccon@dm.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30 - via Buonarroti 1/c

# PROPRIETÀ LEGATE ALLE CURVE

**Def.** Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^M$, continua, posso definire:

$\int_a^b \gamma(t)\,dt =$ vettore di $\mathbb{R}^M$ che ha come componente i-esima $\int_a^b \gamma_i(t)\,dt$

ABBIAMO GIÀ DETTO CHE $\gamma'(t) \underset{def.}{=}$ vettore in $\mathbb{R}^M$ di componenti $\gamma_i'(t)$ (ANCHE $\dot{\gamma}(t)$)

**TEOR.** (fond. calcolo integrale)

- Se $\gamma$ è derivabile $\Rightarrow \int_a^b \dot{\gamma}(t)\,dt = \gamma(b) - \gamma(a)$

(DUNQUE SE $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^M$ è UNA PRIMITIVA di $\gamma$:

cioè $\Gamma' = \gamma$ (VETTORIALMENTE)

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = \Gamma(b) - \Gamma(a)$$

- Se $\gamma$ è continua, posto $\Gamma(t) := \int_a^t \gamma(s)\,ds$

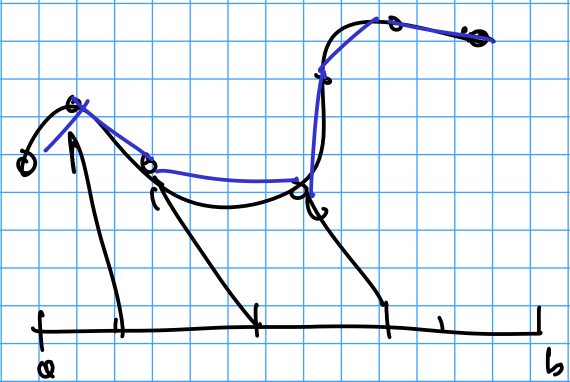
$\Rightarrow \quad \Gamma'(t) = \gamma(t) \quad$ ($\Gamma$ è primitiva di $\gamma$)

TUTTO È EGUALE A QUANTO VISTO QUANDO $M=1$
(basta ragionare componente per componente)

TORNIAMO ALLA NOZIONE DI LUNGHEZZA.

Dato $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, continua, abbiamo definito

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| : \{t_0, t_1 \dots t_n\} \text{ suddivisione di } [a,b] \right\}$$




$\ell$ si chiama:
lunghezza di $\gamma$

IN GENERALE PUÒ SUCCEDERE CHE $\ell(\gamma) = +\infty$

Def. Dico che $\gamma$ è RETTIFICABILE se $\ell(\gamma) < +\infty$

TEOREMA Se $\underbrace{\gamma \text{ è derivabile e } \dot\gamma \text{ è continua}}$

$\Rightarrow \quad \ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt \quad$ ($\gamma$ è una curva $C^1$)

(NON LO DIMOSTRIAMO)

DEF Supponiamo che $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^M$ sia $C^1$.
Supponiamo di avere $\varphi : [c,d] \to [a,b]$
$\varphi$ $C^1$ (derivabile, con derivata continua) e
$\varphi$ bigettiva.

Posso definire $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$ per $s \in [c,d]$
( $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ ). "$\gamma_1$ è una riparametrizzata di $\gamma$"
e $\varphi$ è un "cambio di parametro"

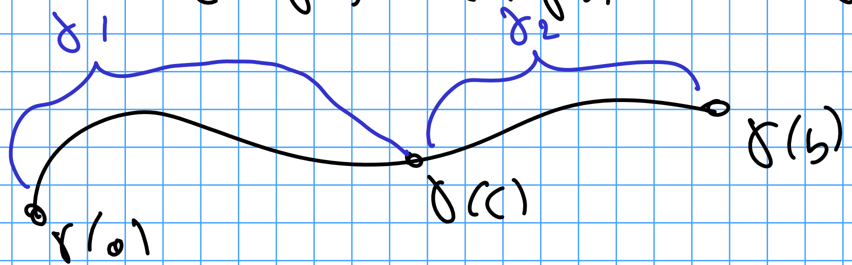
FATTO 1 $\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma)$ (lo dimostriamo dopo)

FATTO 2 Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^M$, $a < c < b$

allora posso vedere $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove

$\gamma_1 = \gamma$ ristretta a $[a,c]$, $\gamma_2$ ristretta a $[c,b]$

SI HA $\ell(\gamma_1)+\ell(\gamma_2)=\ell(\gamma)$




**TEOREMA** Se $\gamma$ è regolare a tratti, cioè

se $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\dots\cup\gamma_n$ dove

ogni $\gamma_i$ è definita su $I_i=[a_i;b_i]$ ed è regolare

$$\Rightarrow \quad \ell(\gamma)=\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}|\dot{\gamma}_i(t)|\,dt$$

VALE ALLORA UN FATTO LEGGERMENTE PIÙ GENERALE

Se $\gamma_1$ e $\gamma_2$ sono regolari a tratti e $\gamma_2$ è consecutivo a $\gamma_1$ (estremo dx di $\gamma_1$ = estremo sx di $\gamma_2$)

$\Rightarrow$ $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$ è regolare a tratti e

$$\ell(\gamma)=\ell(\gamma_1)+\ell(\gamma_2)$$

## DEFINIZIONE (INTEGRALE CURVILINEO DI TIPO I)

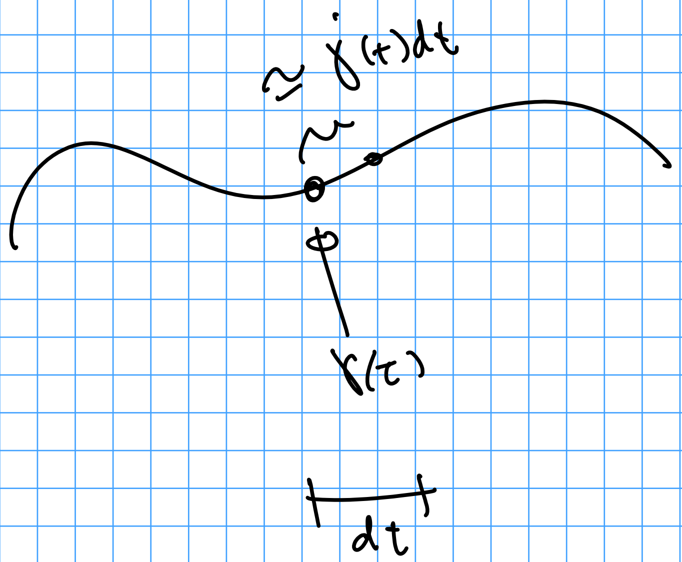
Dato $\gamma$ una curva REGOLARE semplice, $[\gamma]$ = sostegno di $\gamma$.

Se $f$ è una funzione continua da $[\gamma] \to \mathbb{R}$

definisco

$$\int_\gamma f(P)\,dP = \int_a^b f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt$$

(NOTA: se $f = 1$ ottengo $\ell(\gamma)$)




Se $\gamma$ è regolare a tratti, cioè

$\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$

definisco

$$\int_\gamma f(P)\,dP = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(P)\,dP$$

(**ESEMPIO**: $[\gamma]$ rappresenta un filo $\sigma(P)$ = densità di un $P \in$ filo $\Rightarrow$ $\int_\gamma \sigma(P)\,dP$ = massa del filo)

# PROPRIETÀ

(a) Se $\gamma_1$ è una riparametrizzata di $\gamma$ $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1} f(p)\, dp = \int_{\gamma} f(p)\, dp$$

DIM NEL CASO $\gamma$ regolare. Ho $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ di classe $C^1$, bigettiva tale che $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$

Ho DUE POSSIBILITÀ :

(a) $\varphi$ strett. crescente $\Rightarrow$ $\varphi' \geq 0$, $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$

(b) $\varphi$ strett. decr. $\Rightarrow$ $\varphi' \leq 0$, $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$

(a) VERSO CONCORDE (b) VERSO DISCORDE TRA $\gamma$ e $\gamma_1$

CONSIDERIAMO IL CASO (a).

$$\dot\gamma_1(s) = \frac{d}{ds}\gamma(\varphi(s)) = \dot\gamma(\varphi(s))\,\varphi'(s) = \dot\gamma(\varphi(s))|\varphi'(s)|$$

ALLORA $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(p)\,dp = \int_c^d f(\gamma_1(s))\,\|\dot\gamma_1(s)\|\,ds =$

$$\int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\,\|\dot\gamma(\varphi(s))\|\,|\varphi'(s)|\,ds$$

(FINO A QUA NON CONTA (a) o (b))

$=$ (se sono nel caso (a))

$$\int_c^d \underbrace{f(\gamma(\varphi(s)))\,\|\dot\gamma(\varphi(s))\|}_{g(\varphi(s))}\,\varphi'(s)\,ds \overset{\varphi' \geq 0}{=} \qquad \left(\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} g(t)\,dt\right)$$

$$= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_\gamma f(p)\,dp \qquad \#$$

(IN PARTICOLARE $\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1)$ )

: CONTINUAZIONE DELLE PROPRIETÀ

(b) (linearità)

$$\int_\gamma (\lambda f(p) + \mu g(p))\,dp = \lambda \int_\gamma f(p)\,dp + \mu \int_\gamma g(p)\,dp$$

(c) ADDITIVITÀ RISPETTO "ALLA CURVA"

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(p)\,dp = \int_{\gamma_1} f(p)\,dp + \int_{\gamma_2} f(p)\,dp$$

(d) $\left|\int_\gamma f(p)\,dp\right| \le \underbrace{\max_{x\in[\gamma]} f(x)}_{c} \cdot \ell(\gamma)$

DIM $\left|\int_\gamma f(p)\,dp\right| =$ (caso $\gamma$ regolare)

$$\left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt\right| \le$$

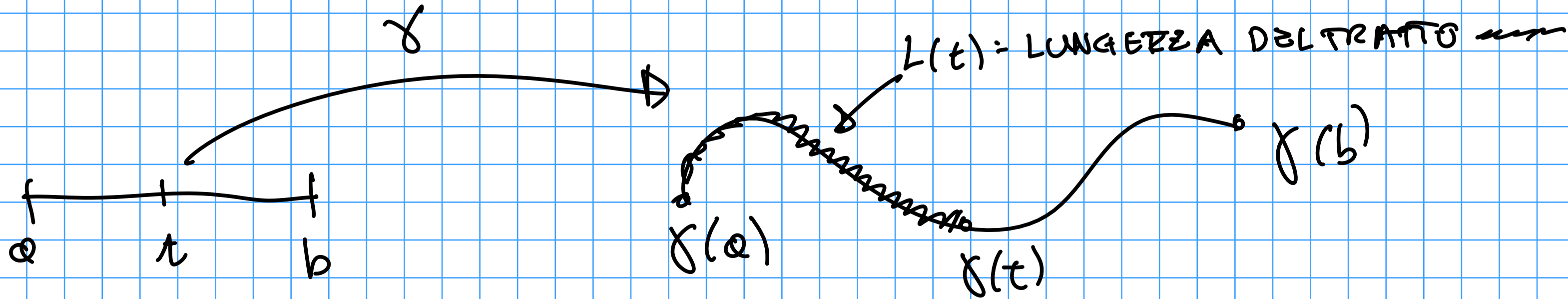
$$K\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt = K\,\ell(\gamma)$$

---

PARAMETRIZZAZIONE IN LUNGHEZZA D'ARCO

Dato $\gamma$ curva regolare (si rifà anche se $\gamma$ è regolare a tratti) $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^M$

definisco $L(t) := \int_a^t \|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau$, per $t\in[a,b]$



$L : [a,b] \to [0, \ell(\gamma)]$ , strettamente crescente

( lo crescenza stretta dipende dal fatto che $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ $\forall t$ )

$\Rightarrow \exists \; L^{-1}$ da $[0, \ell(\gamma)] \to [a,b]$ e

$$(L^{-1})'(s) = \frac{1}{L'(L^{-1}(s))}$$ ( teorema in $\mathbb{R}$ ... )

Se definisco $\gamma_1(s) = \gamma(L^{-1}(s))$ TROVO

$$\dot{\gamma}_1(s) = \dot{\gamma}(L^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{L'(L^{-1}(s))} = \circledast$$

Dato che $L(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \Rightarrow L'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$

$$\circledast = \dot{\gamma}(L^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{\gamma}(L^{-1}(s))\|} \qquad = \int_0^s \|\dot{\gamma}_1\| ds$$

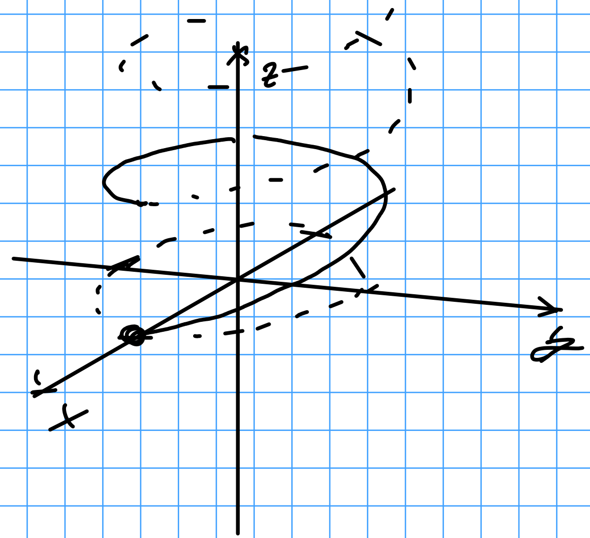
DUNQUE $\|\dot{\gamma}_1(s)\| = 1$ e $\int_0^s \|\dot{\gamma}_1(s)\| = s$

$\gamma_1$ È LA RIPARAMETRIZZAZIONE IN LUNGHEZZA D'ARCO

ESEMPI

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ m\,t \end{pmatrix}$$




LUNGHEZZA DI $\gamma$ = ??

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{R^2 + m^2}$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \sqrt{R^2+m^2} \cdot 2\pi$$

CURVE IN COORDINATE POLARI IN $\mathbb{R}^2$

supponiamo che $\gamma$ sia data mediante una relazione

" $\rho = g(\theta)$ " per $g : \mathbb{R} \to [a, +\infty[$

QUESTO SOTTINTENDE CHE $\gamma$ è parametrizzata da $\theta$ nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(\theta) \left(= \rho \cos(\theta)\right) = g(\theta)\cos(\theta) \\ \gamma_2(\theta) \left(= \rho \sin(\theta)\right) = g(\theta)\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

( va poi specificato dove varia $\theta$ ... )

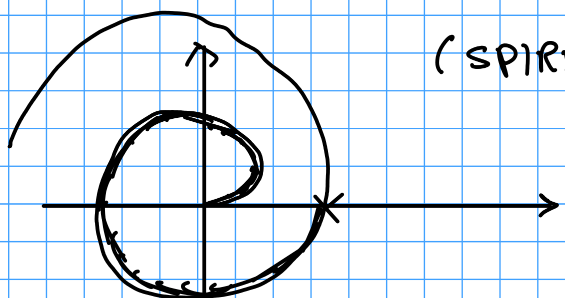
SE $\gamma$ è questo $\Rightarrow$

$$\dot{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} g'(\theta)\cos(\theta) - g(\theta)\sin(\theta) \\ g'(\theta)\sin(\theta) + g(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{\gamma}(\theta)\|^2 = g'(\theta)^2\cos^2(\theta) - 2g'(\theta)\cancel{g(\theta)}\cos(\theta)\sin(\theta)$$
$$+ g(\theta)^2\sin^2(\theta) + g'(\theta)^2\sin^2(\theta) + 2g'(\theta)\cancel{g(\theta)}\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$+ g(\theta)^2\cos^2(\theta) = g'(\theta)^2 + g(\theta)^2$$

DUNQUE $\|\dot{\gamma}(\theta)\| = \sqrt{g'(\theta)^2 + g(\theta)^2}$

<u>ESEMPIO</u> $\rho = m\theta$ (SPIRALE DI ARCHIMEDE)



LUNGHEZZA ~~x~~ $\theta \in [0, 2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{m^2 + m^2\theta^2}\, d\theta = m \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta$$

$$= m \int_0^{2\pi} \frac{1+\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\, d\theta = m \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} + m\int_0^{2\pi} \theta \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\, d\theta$$

$$m \operatorname{ArcSinh}(\theta) \Big|_0^{2\pi} + \underbrace{m \left[ \theta \sqrt{1+\theta^2} \right]_0^{2\pi} - m\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta}_{\text{per parti}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad m \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = \frac{m\left(\operatorname{ArcSinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}\right)}{2}$$

<u>DEF.</u> Data $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^M$

CHIAMO BARICENTRO DI $\gamma$ il vettore $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_M \end{pmatrix}$

tale che $\overline{x}_i = \int_\gamma \pi_i(p)\, dp$

dove $\pi_i(p) = p_i$ $\left( \;\; \parallel \;\; \int_a^b \gamma_i(t) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \right)$

## PER ESEMPIO    $\gamma$ = spirale di Archimede

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} m\,t\cos(t) \\ m\,t\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\pi_1(\gamma(t)) = m\,t\cos(t)$$
$$\pi_2(\gamma(t)) = m\,t\sin(t)$$

$$\|\dot\gamma(t)\| = m\sqrt{1+t^2}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$X_1 = \int_0^{2\pi} m\,t\cos(t)\sqrt{1+t^2}$$
$$X_2 = \int_0^{2\pi} m\,t\sin(t)\sqrt{1+t^2}$$

NON SI FANNO ...

:(

NON SI CALCOLA

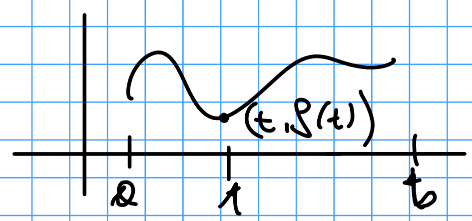
---

## LUNGHEZZA DI UN TRATTO DI GRAFICO

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

Posso considerare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ che "segue il grafico" di $f$. cioè

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

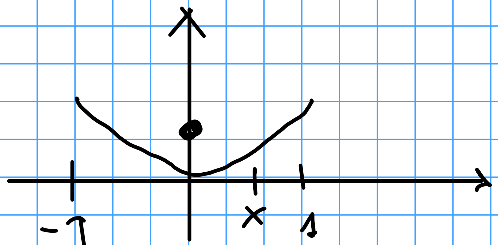



$$\dot\gamma(t) = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

⇒ lunghezza di un tratto di grafico =

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}$$

Per esempio se $f(x) = a x^2$ $\quad -1 \le x \le 1$




$$\Rightarrow \ell = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4a^2x^2}\, dx$$

= - - - = (si fa come il caso precedente!)

CALCOLIAMO IL BARICENTRO: $\quad (a = 1)$

$$\bar{x} = \int_{-1}^{1} x \sqrt{1+4x^2}\, dx = 0$$

$$\bar{y} = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1+4x^2}\, dx = *$$

sostituzione $\quad x = \frac{1}{2} \sinh(t) \qquad dx = \frac{1}{2} \cosh(t)$

$$\circledast = \int_{\mathrm{ARCSINH}(-2)}^{\mathrm{ARCSINH}(2) \leftarrow t_0} \frac{1}{4} \sinh^2(t) \cosh(t) \frac{\cosh(t)}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{t_0} (\sinh(t) \cosh(t))^2\, dt =$$

$$\frac{1}{16} \int_0^{t_0} \sinh^2(2t)\, dt = \frac{1}{16} \int_0^{t_0} \frac{\cosh(4t) - 1}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{32} \left( \frac{\sinh(4t)}{4} - \frac{t}{2} \right) \Bigg|_0^{t_0} =$$

$$\frac{\sinh(4t_0)}{128} - \frac{1}{64} \mathrm{Arcsinh}(2) = \frac{9\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{64} \mathrm{Arsinh}(2)$$

$$\frac{\sinh(2t_0) \cosh(2t_0)}{64} =$$

$$\frac{\sinh(t_0) \cosh(t_0)}{32} \cdot \left( \sinh^2(t_0) + \cosh^2(t_0) \right) =$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{32} (4 + 1 + 4) = \frac{9\sqrt{5}}{16}$$